TANTERVI
ÉS MÓDSZERTANI
ÚTMUTATÓ FÜZETEK

NAT
NEMZETI ALAPTANTERV
2020

# ÚTMUTATÓ A MATEMATIKA TANTÁRGY TANÍTÁSÁHOZ

a 2020-ban kiadott
Nemzeti alaptanterv
és kerettantervek alapján

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Ez a kiadvány az EFOP-3.2.15-VEKOP-17-2017-00001 azonosító számú, *„A köznevelés keretrendszeréhez kapcsolódó mérési-értékelési és digitális fejlesztések, innovatív oktatásszervezési eljárások kialakítása, megújítása"* című kiemelt projekt  Tartalomfejlesztési alprojektje (Oktatás 2030 Tanulástudományi Kutatócsoport, EKE) keretében valósult meg.

**Szakmai vezető:**
Csépe Valéria

**Projektmenedzser:**
Szili Tamás

**Szerzők:**
Csapodi Csaba, Hegyi Györgyné, Kosztolányi József, Kulman Katalin, Móricz Márk, Pintér Klára, Vancsó Ödön

**Nyelvi lektor:**
Gönye László

**Szerkesztő:**
Ádám Péter

**Tördelés:**
Gombás Gizella

Megjelent: 2020

OKTATÁS 2030

EGER 1774
ESZTERHÁZY KÁROLY EGYETEM

# Tartalomjegyzék

# 1. Elemzés a matematikai tudásterület korábbi tantervi-tartalmi szabályozóiról

*„A NAGY felfedezések nagy feladatokat oldanak meg, de nincs olyan feladat, amelynek megoldásához ne volna szükség valami kis felfedezésre. Lehet, hogy a feladat, amelyen gondolkozol, egyszerű; de ha felkelti érdeklődésedet, mozgósítja találékonyságodat, és végül, ha sikerül önállóan megoldanod, átéled a felfedezés izgalmát és diadalát.” (Pólya György)*

*„De a matematika nem valami távoli érthetetlenség, amihez külön ész kéne, ugyanavval az (egy szál) eszünkkel közelítünk a regényhez, mint őhozzá. A matematika is a létezésünkről, annak gazdagságáról ad hírt. Mindig ugyanarról beszélünk, hol Flaubert, hol Bolyai, hol Pilinszky, hol Gödel hangját halljuk. Ha fülelünk.” (Esterházy Péter)*

## 1.1. Előzmények

A matematika, illetve **a matematika tanításának fontosságát** mindenkor és mindenhol elismerték és elismerik ma is. Mind a kultúra műveltségképe, mind a praktikus eszközként való alkalmazás, mind a különböző kompetenciák kialakításának modern igényei szempontjából a matematika alapvető, fontos és megbecsült tantárgy. Ezt támasztja alá többek között, hogy a közoktatás minden olyan területén, ahol valamilyen mérésre kerül sor (felvételi, érettségi vizsga, kompetenciamérés), megjelenik a matematika; hogy a felsőoktatás nagyon sok területén szükség van magas fokú matematikai ismeretekre (természettudományos, műszaki, informatikai, gazdasági területek), hogy a munkaerőpiacon több helyen is megjelennek az elvárások között a matematikai kompetenciák.

A fentieket támasztja alá, hogy a 2012-es kerettantervek bevezetőjében **komoly elvárások** fogalmazódnak meg a matematikatanítás céljait illetően:

> „A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket és leírásokat. [...] A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társa-

dalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. [...] Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. [...] A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére. [...] A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt. [...] A feladatmegoldáson keresztül a tanuló képessé válhat a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára. Kialakul benne az önellenőrzés igénye, a sajátunkétól eltérő szemlélet tisztelete."

A **magas elvárások** azonban **nem járnak együtt megfelelő eredményekkel**. Az elmúlt évek hazai és nemzetközi mérései alapján nem állíthatjuk, hogy a kitűzött célokat akár csak megközelítőleg elértük.

Szintén ellentmondásba ütközünk, ha az elmúlt évszázad tanterveit és a tantervek szerint oktatott diákság körét vetjük össze a jelenlegivel. A matematika tanterv nagyon sok kisebb módosításon ment keresztül az elmúlt évtizedekben[1], de alapvetően és lényegét tekintve nem változott. Az algebra és geometria témaköreinek tananyaga gyakorlatilag 100 éve változatlan, csak a függvénytani ismeretek jelentettek újdonságot a korábbiakhoz képest az 1926. évi tantervben. Az utóbbi évtizedek újabb bővülést hoztak: a gráfelmélet, a statisztika, a valószínűség-számítás alapvető elemei megjelentek a tantervben és az érettségi követelményekben.

Ugyanakkor fontos kiemelni, hogy míg 100 évvel ezelőtt (1920-ban) a 20–24 éves korosztály kb. 4%-a, addig 2011-ben ugyanennek a korosztálynak kb. a 60%-a rendelkezett érettségi vizsgával[2]. Azaz a matematika érettségi vizsgán nagyjából **ugyanazon (sőt helyenként a korábbinál bővebb) követelményeket támasztjuk jelenleg a népesség bő 50%-ával szemben, mint amit korábban a (feltételezhetően legjobb) 4%-kal szemben állítottunk**.

Végül, de nem utolsósorban az adatok azt mutatják, hogy a fentiek ellenére **a matematika tanítására fordítható óraszám nagymértékben**, a 12 évfolyam alatt kb. 20%-kal **csökkent** az elmúlt 40 évben (a részletes adatokat ld. Laczkovich Miklós előadásában[3]).

---

[1] http://doktori.bibl.u-szeged.hu/1984/1/3754_hajnal_imre.pdf
[2] http://www.ksh.hu/nepszamlalas/tablak_iskolazottsag
[3] http://mta.hu/data/dokumentumok/hatteranyagok/matokt_laczk.pdf

## 1.2. A jelenlegi helyzet

### *1.2.1. A közelmúlt Nemzeti alaptanterveinek sajátosságai*

Mielőtt a 2012-ben elfogadott Nat ismertetésére rátérnénk, előbb az előzményeket vázoljuk röviden.

Az első Nemzeti alaptantervet hosszas viták után **1995** októberében fogadta el a Kormány, és az 1998/99-es tanévben vezették be az 1. és a 7. évfolyamokon.[4] Az első Nat iskolatípusok felett álló szabályozást kívánt bevezetni az 1–10. évfolyamokra (16 éves korig), ezáltal az ún. **kétpólusú tartalmi szabályozás** központi oldalát jelenítette meg. A másik pólus a Nat-ra épülő helyi tantervek rendszere volt, amely a korábbinál lényegesen nagyobb szabadságot biztosított a tervezésben az iskoláknak és a tanároknak. A dokumentum tartalmában is több újítás bevezetésére került sor. A magyar iskolarendszerben szokásos tantárgyi szemléletet a tanítási tartalom integrált szemlélete váltotta fel. A szerkesztők a műveltség alapjait 10 műveltségi területen foglalták össze, ezek egyike volt a matematika. A követelményeket az egyes műveltségi területekre vonatkozóan három szempont mentén, négy iskolai (életkori) szakaszra (1–4., 5–6., 7–8., 9–10. évfolyam) bontva jelenítették meg:

- A tanítandó tananyag, a jártasságok, készségek, képességek, beállítódások fejlesztéséhez nélkülözhetetlennek ítélt tartalmak.
- Fejlesztési követelmények, kompetenciák.
- Minimális teljesítmény.

A Nat az egyes műveltségi területekre nem óraszámokat, hanem százalékos intervallumokat szabott meg, úgy, hogy a tartalmi „kitöltés" 30–50%-át a helyi tantervekre bízta. Ezt az első alaptanterv-verziót alapvetően azzal a kritikával illették, hogy nem nyilatkozott elég részletesen és széleskörűen a fejlesztendő kompetenciákról, helyette inkább az adott életkornak megfelelően a minden tanuló által (iskolatípustól függetlenül) elsajátítandó tartalmakra koncentrált.

A következő Nat változat **2003**-ban jelent meg, amit 2007-ben módosítottak. Mivel a matematika műveltségterületre vonatkozóan nem történt módosítás, ezért ez utóbbiról, annak az 1995-ös Nat-hoz viszonyított újdonságairól csak vázlatosan írunk.

[4] http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_implement_090702.pdf

- A dokumentum kilenc **kulcskompetenciát** határozott meg, az egyik ezek közül a matematikai kompetencia. *„A kulcskompetenciák azok a kompetenciák, amelyekre minden egyénnek szüksége van személyes boldogulásához és fejlődéséhez, az aktív állampolgári léthez, a társadalmi beilleszkedéshez és a munkához.”*
- Sokkal konkrétabban és szélesebb vertikumban adta meg az első Nat-hoz képest a fejlesztési feladatokat és a fejlesztendő, speciálisan matematikai kompetenciákat az 1–4., 5–6., 7–8., 9–10., 11–12. évfolyamokra bontva.
- Nem adta meg az egyes fejlesztési feladatok mellé a konkrét tananyagtartalmakat, ami mindenképpen lényeges változás az előző Nat-hoz képest.

Ennek a verziónak nagy értéke a fejlesztési feladatok és fejlesztendő kompetenciák tudományos igényességű, rendszerbe foglalt, pontos (néhol talán kicsit túlrészletező) leírása. A tananyagtartalmak hiánya, illetve nagyon vázlatos említése miatt viszont éppen a „tudományossága” távolította el a mindennapi tanítási gyakorlattól.

## *1.2.2. A 2012-ben kiadott Nat rövid ismertetése és elemzése a 2007-ben kiadott Nat-tal összehasonlítva*

### 1.2.2.1. A matematikai kompetenciáról és annak fejlesztési módjáról

A 2007-es Nat abból indult ki, hogy az egyén mindennapi életéhez szükség van a matematikai kompetencia fejlesztésére. Ennek megvalósításához a tevékenykedtetést és az ismeretek megszerzését tartotta fontosnak. *„A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek.”* Fontos kiemelni, hogy e kettő nem különválasztható, nem azonos fogalmi szinten lévő dolog: az ismeretszerzés egyik (és talán legfontosabb) módja a korábbi életszakaszokban a tevékenykedtetés, de ez a későbbi életkorokban sem hagyható el. Az absztrakciós gondolkodás fejlesztésekor minden új ismeretnél legjobb ebből a tevékeny, konkrét tapasztalatszerzésből kiindulni, ha ez lehetséges. Tehát a matematikai kompetencia fejlesztésének kiindulópontja a tevékenykedtetés, ami által ismeretekhez jutunk.

A 2012-es Nat a kompetencia kialakulásához elsőként jelölte meg az ismereteket, és másodsorban a készségszintű tevékenységeket. *„A matematikai kompetencia kialakulásában, hasonlóan más területekhez, az ismeretek és a készségszintű tevékenységek egyaránt fontos szerepet töltenek be.”* Ez abból a szempontból kifogásolható, hogy az ismeretekre helyezte a hangsúlyt egy kompetencia fejlesztéséhez, azt sugallva, hogy az csak bizonyos ismeretek által lesz formálható, holott többféle ismeretanyag is képes ugyanolyan hatékony lenni. A „készségszintű tevékenységek” kifejezéssel pedig egyáltalán nem a cselekvő tapasztalatszerzésre utal, sokkal inkább valamiféle algoritmizálható, jól begyakorlott ismeretalkalmazást tart fontosnak.

A szükséges képességek, készségek, ismeretek és attitűdök terén többé-kevésbé egységes felsorolást végez mindkét koncepció, de a 2007-es Nat megjelöli az alapvető matematikai reprezentációk fejlődő ismeretét, ami az újabb alaptantervben nem jelent meg. Ezenkívül a korábbi dokumentum a megértésre, míg a 2012-es Nat az alkalmazásra helyezte a hangsúlyt. Véleményünk szerint mindkettő fontos, együtt is meg kellene említeni őket, ugyanis az alkalmazhatóság alapja a megértés.

A 2007-es Nat a pozitív attitűd kialakításának alapját (az igazság tiszteletén túl) abban látja, hogy a világ dolgainak logikus okát és érvényességét keressük. A 2012-es Nat szintén az igazság tiszteletéből indul ki, de feltételezi azt, hogy a *„világ rendje megismerhető, megérthető és leírható”.*

#### 1.2.2.2. Fejlesztési feladatok

A 2012-es Nat fejlesztési feladatokra vonatkozó része (is) jobban strukturált, pontosabb fogalmazású, modernebb szerkesztettséget mutat. Kevesebb tartalom jelenik meg benne, mint a korábbiban, és kevesebb példát hoz fel az értelmezéshez. Lényeges különbség a 2007-es és a 2012-es Nat között, hogy bizonyos fejlesztési feladatokat másként, más korosztályokban kívánnak megvalósítani. A 2007-es alaptantervben jellemzően hosszan történik a fejlesztés (akár 12 évfolyamon keresztül), illetve többször előfordulnak 6+6-os fejlesztési szakaszhatárok. A 2012-es Nat hamarabb lezár bizonyos fejlesztési feladatokat. Ez alól kivétel a Matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei című rész (7.), ahol 1. osztálytól megfogalmazza ezeket az elveket, szemben a régebbi dokumentummal. A 2007-es Nat egy megjegyzéssel él a fejlesztési feladatok felsorolása után (ami teljesen hiányzik a 2012-esből): *„A fenti fejlesztési területeket a matematika tanítása során tudatosan kell terveznünk. Ennek a fejlesztésnek nem mennyiségi, hanem a tanulók tempójához igazodó minőségi fejlesztésnek kell lennie. Természetesen nem lehet valamennyi fejlesztési cél mindig egyaránt hangsúlyos. A tanár egy-egy tevékenység során a helyzetnek megfelelően* *választja meg azokat, amelyeket kiemelten kíván követni.”* Ebben véleményünk szerint nagyon fontos elvek fogalmazódnak meg, amik a tanárt lényegében alkotói munkára hívják meg.

### *1.2.3. Az MTA Matematika Közoktatási Munkabizottság 2016. évi kérdőíve*

A Matematika Közoktatási Munkabizottságot[5] az MTA III. osztálya azzal a céllal hozta létre, **hogy felmérje a magyarországi matematikatanítás jelenlegi helyzetét és főbb problémáit**. E felmérés eszközeként a munkabizottság 2016 elején kidolgozott egy kérdőívet, amelyet 2016. február-március folyamán **4257-en töltöttek ki**.[6] Az alábbiakban a kérdőívnek csak azokkal a részleteivel foglalkozunk, amelyek a tantervi-tartalmi szabályozók szempontjából relevánsak.

A megfogalmazott állításokat súlyozni kellett azok érvényességét illetően egy 0 és 10 közötti számmal (0 – lényegtelen, 10 – nagyon súlyos probléma). Néhány állítás és az arra adott válaszok átlaga, megoszlása:

> *„A követelményekhez, az elvárt tudásszinthez képest alacsony heti tanulói matematika óraszám”* – a válaszok átlaga: 7,1. A válaszadók több mint fele legalább 8-as súlyosságúnak ítélte a problémát.
>
> *„A tanulók iskolai leterhelése”* – a válaszok átlaga: 8,4. A válaszadók több mint fele legalább 9-es, több mint 2/3-a pedig legalább 8-as súlyosságúnak ítélte a problémát.
>
> *„A tantervek struktúrája, tananyagválasztás, az anyag évfolyamok szerinti elosztása, hozzárendelt óraszámok stb.”* – a válaszok átlaga: 7,1. A 4164 válaszadó több mint fele legalább 8-as súlyosságúnak ítélte a problémát.

A kérdőívet kitöltők a saját szavaikkal is kifejthették azokat a problémákat, amelyek hátráltatják a munkát. Ezekből a legfontosabbakat emeltük ki az alábbiakban.

A pedagógusok véleménye szerint a kiemelkedően **legnagyobb problémát a tanulók hozott tudásában, fejlettségében, felkészültségében mutatkozó súlyos lemaradások jelentik**. Már az óvodából az 1. osztályba lépő kisgyerekek tanítói is sokat küszködnek az alapvető ismeretek, tapasztalatok hiányával, de a lemaradás az évek során rohamosan fokozódik. Az egyik ok a **nagy tananyag-mennyiség, a magas követelmények és a hozzájuk szükséges idő, óraszám**

5 https://mta.hu/iii-osztaly/matematikai-kozoktatasi-munkabizottsag-105600
6 https://mta.hu/data/dokumentumok/iii_osztaly/2016/tanitoi_tanari_kerdoiv_osszegzes_2016%20(1).pdf

**hiánya**. A korosztálynak nem megfelelő, illetve **túl elvont gondolkodást igénylő anyagrészek** szerepeltetése, valamint a **gyakorlásra, elmélyítésre jutó kevés idő** szintén hozzájárulnak a tanulók leszakadásához. Nagy különbséget látnak a kollégák az adott évfolyamon megkövetelt anyag és a következő iskolafokozat felvételi vizsgáin elvárt ismeretek, képességek, készségek között.

*Az 1–4. osztályban tanítók* közül sokan hangsúlyozzák a tanulók célszerű, fejlesztő differenciálásának szükségességét; erre utalnak a **„döntési szabadságot hiányoló" vélemények, a tarthatatlanul szoros tanmenet** követésének elvárására utaló megjegyzések. A vélemények kifejezik, hogy nem megoldott az óvodából az iskolába való átmenet. Igen sok – főképpen hátrányos szociális helyzetű, különféle nehézségekkel küzdő – kisgyerek érkezik az iskolába kevés, alacsony szintű ismerettel, gyakorlati tapasztalattal és képességekkel.

*A felső tagozatos kollégák* a fentieken túl jelzik, hogy a tanulók **felkészültségének hiányosságai** a felső tagozatba lépéskor (íráskészség, értő olvasás, számfogalom, alapműveletek, gyakorlati tapasztalatok) nagyon **súlyos problémaként jelennek meg**.

*A középiskolában oktatók* szintén az oda érkező tanulók felkészültségének hiányában látják a legnagyobb gondot. **Nem ismerik az alapműveleteket, nincsenek tisztában a műveletek sorrendjével.** A tanulóknál nem alakult ki a matematikatanulás helyes módszere. A feladatok elvontak, nem keltik fel a gyerekek érdeklődését, a mindennapi élethez többségüknek semmi köze. **A tanulók jelentős része már az általános iskolában elveszítette a motiváltságát.** A középiskolai osztályokba nagy tudáskülönbséggel érkeznek a tanulók, hiszen nem minden középiskolába van matematika felvételi vizsga.

**Néhány további kérdés és az ezekre adott válaszok megoszlása:**

*A tanulók terhelését* a válaszadók 78%-a csökkentendőnek tartja.

*„Változatlan heti matematika óraszám mellett, az Ön által tanított csoportokban a kötelezően elsajátítandó tananyag csökkentését, változatlanul hagyását vagy növelését tartaná indokoltnak?"* – Tananyagnövelést a válaszadók kevesebb mint 4 százaléka javasolt. A 2–8. évfolyamokon a tananyagcsökkentők vannak többségben. A 9. osztálytól kezdve a tananyagot változatlanul hagyók enyhe többséget alkotnak, kivétel a 11. osztály, ahol a többség ismét a tananyag csökkentését kívánja.

*„Ha ez előző kérdésben valahol a tananyag mennyiségének csökkentését választotta, melyik évfolyamokon, mely témakörökkel csökkentené a tanítandó anyagot?”* – A válaszokból egyértelműen kiolvasható, hogy az alsó tagozaton a mértékváltások tanítását hagyná el a legtöbb kolléga, legalábbis az 1–2. évfolyamon. A felső tagozatos tananyag csökkentésére tett javaslatok évfolyamonként közel azonosan oszlanak meg. A kollégák többsége nem a témakörök csökkentését, hanem elsősorban a tananyag felépítésének újragondolását, a struktúra átalakítását tartaná leginkább célravezetőnek. A középiskolai tananyag csökkentésére tett javaslatok évfolyamonkénti megoszlását nézve kiderül, hogy a tanárok a 11. évfolyam tananyagának csökkentésére tették messze a legtöbb javaslatot.

## 2. A matematika tantárgy az új Nat-ban

A Nat és a hozzá kapcsolódó, az egyes témakörökben a fejlesztési feladatokat részletező kerettanterv az 1–12. évfolyamokra a tananyagtartalmak és a fejlesztési feladatok kötelező minimumát rögzíti az iskolaszerkezetet tükröző, négy évet átölelő egységekre (alsó tagozat, felső tagozat, középiskola), azon belül kétéves szakaszokra bontva.

A matematika a szövegértés mellett a legfontosabb alapkompetencia. Az élet minden területén elengedhetetlenek a matematikatanítás során fejlesztett készségek, képességek, mint a számolás, mérés, problémamegoldás, kritikus gondolkodás, rendszerezés, téri tájékozódás. A matematikatanítás módszereket ad a szövegértésre, és pontos fogalmazásra nevel. A korszerű matematikaoktatás során a korábbiaknál nagyobb hangsúlyt kapnak olyan gyakorlati területek, mint a pénzügyek, a kombinatorika, a statisztika és a valószínűség, amelyek segítenek a hétköznapi döntéseinkben is. Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése a digitális kompetenciákat erősíti. Ilyenformán a matematika tantárgy szinte minden más tantárggyal kölcsönhatásban van, és megalapozza az életben való sikeres eligazodást.

# 3. Általános módszertani javaslatok (tanítási, tanulási, értékelési)

A Nat és a kerettanterv a tanítás helyett a **tanulók tanulását** helyezi a középpontba. A matematikatanulás célja az alkalmazható matematikai tudás megszerzése: ismeretek és gondolati tevékenységek széleskörű tapasztalati alapozása, a kapcsolódó biztos matematikai készségek kialakítása és az ezek alkalmazásához szükséges gondolkodási, problémamegoldási, kommunikációs készségek, képességek fejlesztése. Alapvető fontosságú, hogy a tanulók **valóságon alapuló cselekvő tapasztalatszerzés** és élményeik révén jussanak el jól megértett, sok szálon kapcsolódó ismeretekhez, mert ezek jelentik majd a **hétköznapi életben hosszú távon használható tudás**ukat.

A matematika spirális felépítésének megfelelően az új ismeretek bevezetésekor széleskörű tárgyi tevékenységek alapozzák meg a változatos képi ábrázolásokat, amelyek szükségesek a későbbi absztrakcióhoz, és alkalmassá teszik a tanulókat az ismeretek szimbolikus reprezentációjának megértésére. Kiemelt szerepe van az alkotó gondolkodás fejlesztésének. A sokféle reprezentációban való alkotás segít, hogy a tanuló értve tudja megkonstruálni maga számára az új ismereteket, beágyazva a formálódó tudáshálózatába.

Fontos, hogy egy-egy témakört, problémát, ismeretet több oldalról, sokrétűen és mind szemléletükben, mind matematikai tartalmukban egyaránt változatos eszközök használatával, tevékenységeken keresztül közelítsünk meg. Ez segíti, hogy a tanulók gondolkodása rugalmas maradjon, valamint a fogalmakat és ezek egymás közti viszonyait, összefüggéseit igazán megértsék, elmélyítsék. Azonban az eszközök használata csak a velük végzett céltudatosan tervezett tevékenységek során vezet el az elvontabb ismeretekhez. A kerettantervben található javasolt tevékenységek csupán gondolatébresztők további tevékenységek keresésére, gyűjtésére, válogatására, melyekből aztán minden pedagógus megalkothatja a saját tanítási ötletgyűjteményét.

A matematikai fejlesztés fontos eszköze a **játék**, mely személyiségfejlesztő és közösségépítő hatása mellett minden témakör esetében élvezetes módot kínál problémafelvetésre, problémaelemzésre, problémamegoldásra és gyakorlásra. A matematikai gondolkodás fejlesztése szempontjából kiemelt szerepe van a logikai, a stratégiai és a véletlennel kapcsolatos játékoknak.

A számítógépes oktatóprogramoknak is hatalmas motiváló erejük van. A tanulók a **digitális eszközöket** a tanulás, a gyakorlás szolgálatába állítják, amikor kezdetben egyszerű matematikai jelenségeket figyelnek meg számológépen, vagy számítógépes fejlesztő játékokat használnak a műveletek, a problémamegoldás gyakorlására. Később digitális eszközöket alkalmaznak tanulásra, szemléltetésre, tapasztalatszerzésre. Az alkalmazást, felfedezést segítő szoftverek, digitális információforrások megismerése és használata valamennyi tantárgy, így a matematika tanításában is nagyon fontos.

A tanulók **kommunikációs** képességeinek fejlesztését segítik a kooperatív munkaformák, amelyek lehetőséget adnak a szóbeli és írásbeli kifejezőkészség gyakorlására. Ezek támogatják a matematika nyelvének megértését, a matematikai szövegalkotást, ami elengedhetetlen a matematikai gondolkodáshoz, a valóságos problémákat leíró matematikai modellek megalkotásához. A matematika nyelvének megfelelő alkalmazása a matematikai szókincs ismeretét, valamint a nyelvtani kapcsolatok helyes értését és használatát jelenti. Az alkalmazható matematikatudás megszerzését segítik a nyitott problémák, a tanulók ösztönzése kérdések, problémák megfogalmazására. Fontos, hogy a tanulóközösség természetesnek vegye, a tanulási folyamat részének tekintse a tévedéseket, a vitákat. Ezek lehetnek az egész tanulócsoportot érintő, interaktív formái az egymástól való tanulásnak. A tanulók életkori sajátosságainak megfelelő projektek alkalmat adnak a közös alkotó gondolkodásra és a munka eredményének bemutatására.

Az **1–4. évfolyam**ra vonatkozó javaslatok a módszertani útmutatóban különösen hangsúlyosak, ugyanis az **alsó tagozat**ra vonatkozó javaslatok, ugyanis itt nem annyira a tananyag tartalma, inkább annak feldolgozási módja jelenthet változást a korábbiakhoz képest. Az alsó tagozatos matematika tanulása során olyan attitűd formálódik, olyan alapkészségek alakulnak ki, melyek a tanulók számára a későbbiekben meghatározzák a matematikához fűződő viszonyukat. A Nat és a kerettanterv eredménycéljai és fejlesztési feladatai azt hangsúlyozzák, hogy a tanulók ne csak tudják, hanem meg is értsék a tananyagot, és hogy ez a megértés a gazdag **tevékenykedtetés** során szerzett tapasztalatokra épüljön. Az is hangsúlyos, hogy a megértett ismeretek nem öncélúak, hanem azokat a tanulóknak alkalmazniuk kell. A gondolkodás vagy a fogalmak alakulása nem deduktív úton kezd el kialakulni, hanem olyan tevékenységek során, melyekben a tanuló maga alkothat meg valamit. Ez minden életkorban fontos marad, de az alsó tagozatos korosztályra különösen is igaz, hogy fogékony az alkotó gondolkodásra. Ugyanazt a tartalmat érdemes körüljárni eljátszva, többféle eszközön kirakva, megjelenítve, mert a gyermek a sok egyedi, különálló tapasztalatból tudja megalkotni az általános, elvonatkoztatott fogalmat vagy ismeretet. Ha a tanuló valamit nem ért, akkor nem ugyanúgy, hanem más módokon is meg kell neki mutatni, és időt kell hagyni arra, hogy egy-egy gondolat megérjen benne. Nem szabad erőltetni a megértés nélküli automatizálást, mert akkor már alsó tagozaton gátat vetünk a matematikai gondolkodás fejlődésének, és a hiányosan megalapozott tudás a későbbi évfolyamokon összedőlhet.

A tevékenykedtetéshez és a **sokféle reprezentáció** megjelenítéséhez különféle **eszközök**, lehetőségek állnak rendelkezésre. Természetességéből adódóan a gyerekek először taneszköz nélkül saját maguk is megszemélyesítenek, megjelenítenek dolgokat, vagy hétköznapi tárgyakkal végeznek tevékenységeket a problémák, fogalmak megértéséhez.

Különféle taneszközök is segítik az absztrakcióban való előrehaladást. A legjobb, ha a tanító a tanulókkal közösen tud készíteni eszközöket, ami motiváló hatása mellett azért is hasznos, mert ily módon egy-egy ismerethez, fogalomhoz, problémához speciális eszköz készülhet. Emellett jó lenne, ha minden tanuló rendelkezésére állna néhány sokoldalúan használható eszköz. Ilyen a színes-rúd-készlet, amely kiválóan alkalmas például a hosszúság, terület, térfogat, tömeg méréséhez; a számfogalom alakításához, a számtulajdonságok megjelenítéséhez, a számrendszeres gondolkodáshoz, a törtek szemléltetéséhez; a műveletek értelmezéséhez; a geometriai alakzatok kirakásához, a térszemlélet fejlesztéséhez, a geometriai tulajdonságok megfigyeléséhez; a szöveges feladatokban különböző problémák megoldását segítő szemléltetéshez. Sokrétűen használható eszközök a piros-kék korongok, a számolópálcikák, a különféle tanulói kártyák. A halmazok képzéséhez és a logikai műveletek szemléltetéséhez elengedhetetlenek a logikai lapok, melyek mintájára a tanulók is készíthetnek különféle logikai készleteket. Ezeken kívül sok olyan eszköz létezik, melyből elég, ha az iskolának van egy-egy osztályra való készlete.

A kerettanterv javasolt tevékenységei között sok **játék**ot találunk, hiszen a játék képes egyszerre többféle képességet és készséget is fejleszteni. Különbséget kell tenni a tanítási gyakorlatban a feladat, a játékos feladat és a valódi játék között. Kellően motiváló lehet egy gondolkodtató feladat vagy egy olyan feladatsor megoldása, amiben összefüggéseket lehet felfedezni, hiszen megtanítja a tanulókat arra, hogy értékeljék a feladatokban rejlő matematikai tartalmat. Fontos látnunk, hogy a motiválásra használt rajzok – például amikor egy mackó rendezi a mézes csuprait a rájuk írt számfeladatok szerint növekvő sorrendbe – általában nem teszik szemléletesebbé a matematikai tartalmat. A játékos feladatokban a tanulónak lehetősége van átélni, kipróbálni, megjeleníteni egy-egy matematikai problémát, és ezek által értelmezni azt. Játékos feladatnak tekinthetők a szituációs játékok (például: boltos játék, táncos párok alkotása). A valódi játékok (például: táblás játékok, kártyajátékok) során a tanulók számára a játékban megbújó ismeret, matematikai tartalom mellékes, de ettől függetlenül foglalkoznak vele, észrevétlenül ivódik beléjük, mert olyan célt, motivációt ad, hogy a tanóra keretein kívül is örömmel „gyakorolnak".

Nagyon fontos ugyanazon dolgok **sokféle reprezentáció**ban való megjelenítése, a **tárgyi tevékenységek** alapján a **képi ábrázolások** értelmezése és alkotása. A gyerekek legtöbbször a tevékenységek alapján készítenek rajzokat. Fokozatosan kopnak le a rajzokról a lényegtelen elemek, és válnak az ábrázolások a problémák, ismeretek egyre absztraktabb matematikai modelljeivé. Ez a folyamat azonban nem természetes, a pedagógus támogatásával tanulni, gyakorolni kell.

Az ismeretek, fogalmak elmélyülését segíti az **analógiás gondolkodás**, mely a felismert törvényszerűségeket alkalmazza hasonló vagy egészen más területeken. Ennek fejlesztése is fontos feladat az egyes témakörökben: a bővülő számkör fejben és írásban végzett műveletei során, a szabályjátékok kapcsán, a méréseknél, egyszerű és gondolkodtató szöveges feladatok különbözőképpen megfogalmazott problémáiban, térben és síkban végzett alkotásoknál, és mindezen területek összekapcsolásakor.

A tanulók a sokféle formában megjelenő közös jegyek alapján alakítják ki a fogalmak belső reprezentációját, ezért alsó tagozaton nem szerepelnek megtanulandó matematikai definíciók a tananyagban. A konkrét tevékenységek csak lassan válnak belsővé, gondolativá. Ennek kialakulásához megfelelő időt kell biztosítani, ami egyénenként eltérő lehet, ráadásul ez a folyamat ritkán zárul le alsó tagozaton. A tanulók a tanórán hallott kifejezéseket először megértik, majd később maguk is helyesen használják azokat. A kerettantervben azok a fogalmak szerepelnek, amelyek helyes alkalmazását elvárjuk a tanulóktól, de a meghatározását nem.

Alsó tagozaton a matematikai gondolkodás széleskörű alapozása történik, melynek gyümölcsei csak felső tagozaton vagy akár csak középiskolában fognak beérni. A feladatunk nemcsak az alapműveletek készségszintű megtanítása a 10 000-es számkörben, hanem a munka világában nem kevésbé fontos, sőt az igazi sikerekhez sokkal inkább hozzásegítő **matematikai gondolkodásra való nyitottság** kialakítása is. Az alsó tagozatos matematikatanításnak ezért meg kell teremtenie a lehetőséget arra, hogy a gyermekek rugalmas gondolkodása megmaradjon, sőt a legkülönbözőbb területeken fejlődjön.

Az **5–8. évfolyamon** egyszerre vannak jelen a tevékenykedtető, felfedeztető módszerek és az elvontabb matematikai ismeretek befogadását segítő tanulási módszerek. A legtöbb témakörben a szemléltetésen, a játékos megtapasztaláson, a gyakorlat oldaláról való megközelítésen van a hangsúly. Elvárható a szerzett tapasztalatok értelmezése, rendszerezése, néhány területen az általánosítás lehetőségének felfedezése és megfogalmazása. Hangsúlyt kap az elvonatkoztatás és az absztrakció képességének fejlesztése.

Fejlesztjük a tanulók készségeit a matematikai kommunikáció terén is. Arra törekszünk, hogy egyszerű problémákat felfedezzenek, megfogalmazzanak, és a mindennapi életből vett szöveges problémákat matematikai szempontból értelmezzék. Fontos, hogy a tanulók a matematikai kifejezéseket helyesen használják, a fogalmakat értsék, megmagyarázzák, gyakorlati helyzetekben jól alkalmazzák. A fogalmak megismerése, megértése és alkalmazása feladatokon keresztül történik. A definíciók szakszerű megfogalmazása nem elvárás a tanulóktól, számonkérésüktől tekintsünk el. Differenciálással biztosítjuk a megfelelő ütemű haladást annak a tanulónak, akinél a fogalmak megértése és megfelelő alkalmazása hosszabb időt, több szemléltetést igényel.

A **9–12. évfolyam** fejlesztési feladatainak meghatározása során figyelembe vettük, hogy a 8. és a 9. évfolyam közötti átmenet ne legyen tartalmi és módszertani „ugrás" a tanulók számára. A 9–12. évfolyamokon fokozatosan, az életkori sajátosságoknak megfelelő módon hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. A matematika logikus és következetes felépítésének megmutatásához, illusztrálásához elengedhetetlen a bizonyítási eljárások megértése és ennek érdekében néhány tétel bizonyításának tanítása. Az új fogalmak, algoritmusok, ismeretek bevezetése induktív módon, szemléletesen, a tanulók tevékenységére építve, a tanár által irányított felfedeztetéssel és a valósághoz kapcsolható módon történjen! Néhány hagyományos tananyagrész matematikán kívüli alkalmazása, ezen a minimum szinten a hétköznapi valósághoz kapcsolása nehéz, ezért az ilyen témák ismeretanyagát jelentős mértékben csökkentettük (például szögfüggvények általános értelmezése; logaritmusos kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek; összetett függvénytranszformációk).

Bekerültek a tananyagba olyan témák, amelyek egyrészt a hétköznapi életben is jól használható ismeretekkel, készségekkel és képességekkel „látják el" a tanulókat (pl. pénzügyi matematika; új statisztikai fogalmak és eszközök), másrészt a tanulói hozzáállás és aktivitás szempontjából motiváló jellegűek (pl. egyszerű stratégiás és valószínűségi játékok). Bizonyos matematikai tartalmak a korábbi tantervekhez képest az 5–8. évfolyamról átkerültek erre a tanulási szakaszra.

A tanulók bővülő természettudományos és egyéb ismeretei lehetővé teszik, hogy matematikaórán egyre többet építsünk ezekre a hétköznapi szituációk mellett. Fontos a tanulók szóbeli (matematikai) kommunikációjának fejlesztése. Ezt egyfelől kiselőadások, számítógéppel támogatott prezentációk formájában, másfelől különböző kooperatív munkaformák alkalmazásával, továbbá szóbeli feleltetések során segíthetjük elő. Ez utóbbi különösen fontos az emelt szintű érettségi vizsgára készülő tanulók körében.

A digitális eszközök, a tanulást, szemléltetést, tapasztalatszerzést és felfedezést segítő szoftverek, digitális információforrások megismerésének és a tanulók általi alkalmazásának biztosítása valamennyi tantárgy, így a matematika tanításában is nagyon fontos.

## Értékelés

A matematika tanítása során is használjuk az értékelési eljárások három alapvető típusát. A diagnosztikus értékelés célja a tanulók tudásszintjének megállapítása, a helyzetfeltárás. Az ilyen értékelésre rendszerint egy tanulási szakasz elején kerül sor, és jellegéből adódóan érdemjeggyel nem értékeljük. A formatív értékelés célja a tanuló segítése, fejlesztése. Tulajdonképpen visszajelzés a tanulási folyamat résztvevőinek (tanár–diák–szülő) a tanítás és tanulás eredményességéről; nem feltétlenül jár érdemjeggyel. A szummatív értékelés egy adott folyamat lezárása, célja a teljesítmény mérése, az aktuális tudásszint megállapítása, a minősítés.

A Nat és a kerettanterv útmutatást ad a pedagógus számára, hogy a tanulóknak az egyes ismeretek kapcsán milyen minimumszintre kell eljutniuk. Az elvégzett fejlesztési feladatok ugyanis különböző mélységig juttatják el a tanulókat: egyes tevékenységek megalapoznak egy-egy későbbi ismeretet, mások a megértést szolgálják, és természetesen vannak olyanok, amelyeknek célja a begyakoroltatás, az ismeretek készségszintűvé tétele. Minden fejlesztési feladatot, ismeretet azon a szinten kell számon kérni, amelyre a tanulók eljuthatnak.

Fontos a pedagógus szóbeli értékelése egy-egy munka során vagy gondolatok megosztásakor. A házi feladatok, önálló munkák javításai lényeges visszajelzéseket adnak a tanulónak. Figyelni kell arra is, hogy ezek a javítások ne üresedjenek ki. Ha egy tanulói felszólalást, kirakást, megoldott feladatot hibásnak gondolunk, időnként érdemes a mélyére nézni, hogy vajon mi okozta a hibát. A hibák alapvető információkat hordoznak arról, hogy a tanuló hol tart a fejlődésben, hol akadt el, miben lenne szüksége segítségre. Sokszor nem tudjuk kitalálni, ezért fontos, hogy megkérdezzük a tanulót, miért mondta ezt, miért ezt rakta ki, miért ezt írta. Ha ilyen módon utánajárunk a hibák gyökerének, nemcsak segíteni tudunk, hanem a tanulókat is önreflexióra szoktatjuk, arra, hogy gondolataikat verbalizálják, ellenőrizzék.

Kifejezetten hasznos, ha olyan problémákat is felvetünk, amelyeknek több megoldása lehetséges, azaz nyitott vagy nyitottá tehető feladatokat, kérdéseket alkalmazunk. Ez olyankor is előfordulhat, amikor azt gondolnánk, hogy csak egy megoldás vagy egyféle megoldási út van, viszont a tanuló másra gondolt. Gondolatát, még ha nem is teljesen kifogástalan, értékeljük pozitívan! Kerüljük az olyan helyzeteket, melyekben a tanulók azt érezhetik, hogy a mi gondolatunkat kell kitalálniuk, és minden, ami nem egyezik azzal, az hibás!

Fontos, hogy az értékelés igen gyakran alkalmazott írásbeli dolgozatai mellett, helyett legyenek más értékelési formák is. Például elképzelhető, hogy a dolgozathoz eszközt is használnak a tanulók, vagy akár a dolgozat egy részét tevékenységgel kell megoldaniuk. Ilyenkor a pedagógusnak ott helyben értékelnie kell az adott feladatot, mert a kirakást nem tudja hazavinni. Szokatlansága ellenére az ilyen értékelési formák illeszkednek, sőt szükségesek a Nat-ban meghatározott tanulási célok teljesítésének ellenőrzéséhez.

A gyerekeknek hozzá kell szokniuk a kooperatív munkaformához, a gondolatok egymás közti megosztásához, egymás munkájának kritikus, reális értékeléséhez, egymás elismeréséhez. Ennek sikerességéről is fontos visszajelzést, értékelést adni. Mindenképpen törekedjünk az igazságosságra és a szabályrendszer előzetes ismertetésére! Az értékelési szabályok kialakításába bevonhatjuk a tanulókat, megadva az önértékelés és az egymás értékelésének lehetőségét is.

Ha az osztálynak vagy évfolyamnak projektfeladatot adunk, akkor annak értékelése előre rögzített szempontsor alapján történjen, melyet a projekt tantárgyait tanító tanárok közösen készítenek el! A szempontsor tartalmazza az elvégzendő feladatokat, a súlyuknak megfelelő pontszámokat, és azt, hogy a megszerezhető érdemjegy melyik tantárgy osztályzata lesz! Előre tisztázni kell, melyik tanuló milyen szerepet vállal a projekt elkészítésében. Az értékelésben kapjon szerepet a munkához való hozzáállás is! Az esetleges sikertelenségért mindig közös felelősséget vállaljunk, ne hárítsuk azt kizárólag a tanulókra! A bonyolult értékelési rendszernek nem szabad az értékeléstől való eltekintéshez vagy a munkaforma mellőzéséhez vezetnie.

Alsó tagozaton a cselekedtetés hangsúlyossá válása alkalmat ad a tanulók gondolkodásának megfigyelésére. Szavak nélkül is látható, hogy keresgélik a megoldást, így lehetőségünk van az azonnali visszajelzésre. A tevékenységek miatt az órai munka értékelése nagy jelentőséggel bír.

Fontos feladat a tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációjának fejlesztése. Ez részben az órai munka, részben a számonkérések során történik. Az alsó tagozatos gyerekektől semmiképpen nem várjuk el definíciók felmondását. Elegendő, ha a legfontosabb fogalmakat kifejező szavakat helyesen használják. Az azonban elvárható, hogy gondolataikat, megoldásaikat indokolni tudják, vagy legalább megpróbálkozzanak az indoklással. Fontos, hogy a tanulók egy-egy dolgot (például téglalap) jellemezni tudjanak néhány tulajdonságával. Ez szóban egyszerűbb, de gyakoroltatni kell az írásos formát is. A tanítónak közérthetően, ugyanakkor szakszerűen kell fogalmaznia (például kocka csúcsa), de a tanulóktól fogadjuk el a gyereknyelvi szóhasználatot is (kocka sarka)!

Alsó tagozaton a félévi és év végi szöveges értékelés ne csak minősítse a tanulók munkáját, hanem emelje ki, hogy a tanulók erősségei mely területeken jelennek meg, és a gyengébb területek fejlesztésének is adja meg az irányát! A tanító egyénre szabva fogalmazza meg az értékeléseket! Ha ehhez szükséges valamilyen szövegbank használata, akkor az legyen szerkeszthető! A szövegbank összeállítása gondos munkát igényel, meg kell jelennie benne a tananyag különböző területeinek, és annak, hogy az egyes kiemelt fejlesztési feladatokat a tanuló milyen szinten teljesítette (például: tanítói segítséggel, eszközzel). A szöveges értékelésnek minden olyan formáját kerülni kell, mely visszavezethető az öt (vagy három, vagy négy) fokú skálára, ugyanis a szöveges értékelés nem a tanulók összehasonlítását szolgálja, hanem a tanulókat és a szülőket informálja a gyermek fejlődéséről. A hivatalos forma mellett (vagy helyett) jó, ha a személyesebb hangvétel is megjelenik. (Például az értékelés a gyermeket szólítja meg: Számolásod gyors, de ügyelj arra, hogy a számokat szépen írd! Gyorsan észreveszel összefüggéseket, hagyj időt társaidnak is arra, hogy végig tudják gondolni a megoldást!)

Felső tagozaton és középiskolában a számonkérések tervezésekor figyelni kell a fokozatosságra (a feladatok között és egy feladaton belül is), a sokszínűségre (a témakört érintő rutinszerű feladatok, összetett feladatok, gondolkodtató feladatok stb.), és arra, hogy elegendő időt biztosítsunk a megoldásra. Ha szükséges, a számonkérést bontsuk több részre, sokszor egy 45 perces dolgozat helyett célszerűbb például két rövidebbet íratni.

A dolgozatok megíratása után törekedjünk azok lehetőség szerinti gyors kijavítására, és hagyjunk kellő időt a kijavított dolgozatok típushibáinak megbeszélésére! A tanulók számára az értékelés szempontjai legyenek világosak! Ne féljünk őket bevonni a javítás feladatába! Időnként egy-egy írásbeli dolgozat közös javítása fejlesztő és motiváló hatású lehet, a kölcsönös bizalmat is erősítheti.

Félévzáráskor felső tagozaton, középiskolában szöveges visszajelzést is adjunk az osztálynak vagy a csoportnak! A tanuló is, a pedagógus is jelezheti az egyéni értékelésre való igényt. Ebben feltétlenül térjünk ki a tanuló szóbeli és írásbeli kifejezőkészségének fejlődésére, önmagához mért előrehaladására a matematika tanulásában!

A középiskolai matematikaoktatás tartalmának egyik meghatározója az érettségi vizsgakövetelmény. Érdemes az iskolai írásbeli dolgozatok összeállításánál is követni az írásbeli érettségi vizsgák feladatsoraiban előírásként szereplő arányokat. A dolgozatokban könnyebben megoldható és összetett feladatok (lehetőleg nehezedő sorrendben), továbbá csak a matematikai ismereteket számon kérő és valamilyen modell alkalmazását igénylő feladatok egyaránt szerepeljenek! A tanulóknak fontos gyakorolniuk az időbeosztást a feladatok megoldása során. Javasoljuk, hogy az írásbeli dolgozatok ötfokozatú skálán történő értékelésénél se térjünk el jelentősen a (középszintű) érettségi vizsga ponthatáraitól. Szintén érdemes már a középiskolában alkalmazni az érettségi javításának alapvető szabályait (a leginkább talán azt, hogy valamilyen hibás részeredménnyel történő helyes továbbszámolásért járjanak a megfelelő pontok, természetesen csak abban az esetben, ha a feladat a hibától lényegében nem változott meg).

# 4. A matematika tantárgy alapkerettanterve

## 4.1. Szerkezet

A 2020-ban életbe lépő kerettanterv fejlesztési feladatai és felsorolt ismeretei szorosan kapcsolódnak a Nat megfelelő tanulási céljaihoz. Az ezekben megjelenő matematikai tartalmak minden tanuló számára közvetítendők. A tanári szabadságot és a tanulói csoport matematika iránti fogékonyságát szem előtt tartva az ismeretanyag tovább bővíthető.

A matematika tantárgy alapkerettanterve három nagy, négyéves egységből tevődik össze: 1–4., 5–8. és 9–12. évfolyamok. Ezek a nagy egységek részleteikben és kidolgozottságukban – az egyes korosztályoknak megfelelően – különböznek egymástól, de egységes felépítést határoznak meg, és azonos alapelvek mentén készültek.

Egy-egy nagy négyéves egységen belül kétéves bontásban szerepelnek a tanterv elemei. Az adott évfolyamokhoz tartozó rövid bevezető után a témakörök áttekintő táblázata következik, a témakörökhöz tartozó javasolt óraszámmal. A korábbi kerettantervek öt nagy tematikus egységét kisebb témakörök váltják fel.

Ezt követik témakörönként a Nat-ban a négyéves szakaszra előírt tanulási célok. Ezek a négyéves szakasz első két évének kerettantervében is megjelennek, de természetesen nem teljesítendők az első két évben. Az „A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére" mondatkezdés alatt azokat a tanulási célokat találjuk, amelyek vagy előfordultak az aktuális évfolyampáron (akár más anyagrészeknél), de az oktatási szakasz további két évfolyamán tovább épülnek, vagy csak a következő évfolyampáron kerülnek szóba. Az „A témakör tanulása eredményeként a tanuló" mondatkezdet alatt olyan tanulási célok találhatók, amelyek megvalósulnak az adott évfolyampáron, később már ismeretként tekintünk rájuk, fejlesztési feladatot nem kapcsolunk hozzájuk.

Ezután következnek a fejlesztési feladatok és ismeretek, majd a témakörhöz kapcsolódó fogalmak. Fontos és hasznos újdonság a témakörök végén a javasolt tevékenységek gyűjteménye. A javasolt tevékenységek az adott témakör súlypontjaira mutatnak rá, ismert vagy kevésbé ismert módszerek, munkaformák, játékok említésével. Ezek csak javaslatok, amelyek továbbgondolhatók, tanáregyéniségre, tanulócsoportra igazíthatók, nem csak ott alkalmazhatók, ahol éppen említésre kerültek. Kerettantervi szerepük, hogy felhívják a figyelmet a módszertani megújulás igényére és az oktatással szemben támasztott új elvárások szolgálatára.

## 4.2. Témakörök, fejlesztési feladatok

### 1–2. évfolyam

- Válogatás, halmazok alkotása, vizsgálata
- Rendszerezés, rendszerképzés
- Állítások
- Problémamegoldás
- Szöveges feladatok megoldása
- Szám és valóság kapcsolata
- Számlálás, becslés
- Számok rendezése
- Számok tulajdonságai
- Számok helyi értékes alakja
- Mérőeszközök használata, mérési módszerek
- Alapműveletek értelmezése
- Alapműveletek tulajdonságai
- Szóbeli számolási eljárások
- Fejben számolás
- Alkotás térben és síkon
- Alakzatok geometriai tulajdonságai
- Transzformációk
- Tájékozódás térben és síkon
- Összefüggések, kapcsolatok, szabályszerűségek felismerése
- Adatok megfigyelése
- Valószínűségi gondolkodás

### 3–4. évfolyam

- Válogatás, halmazok alkotása, vizsgálata
- Rendszerezés, rendszerképzés
- Állítások
- Problémamegoldás

- Szöveges feladatok megoldása
- Szám és valóság kapcsolata
- Számlálás, becslés
- Számok rendezése
- Számok tulajdonságai
- Számok helyi értékes alakja
- Mérőeszközök használata, mérési módszerek
- Alapműveletek értelmezése
- Alapműveletek tulajdonságai
- Szóbeli számolási eljárások
- Fejben számolás
- Írásbeli összeadás és kivonás
- Írásbeli szorzás és osztás
- Törtrészek
- Negatív számok
- Alkotás térben és síkon
- Alakzatok geometriai tulajdonságai
- Transzformációk
- Tájékozódás térben és síkon
- Összefüggések, kapcsolatok, szabályszerűségek felismerése
- Adatok megfigyelése
- Valószínűségi gondolkodás

**5–6. évfolyam**

- Halmazok
- Matematikai logika, kombinatorika
- Természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek
- Alapműveletek természetes számokkal
- Egész számok; alapműveletek egész számokkal
- Közönséges törtek, tizedes törtek, racionális számok

- Alapműveletek közönséges törtekkel
- Alapműveletek tizedes törtekkel
- Arányosság, százalékszámítás
- Egyszerű szöveges feladatok
- A függvény fogalmának előkészítése
- Sorozatok
- Mérés és mértékegységek
- Síkbeli alakzatok
- Transzformációk, szerkesztések
- Térgeometria
- Leíró statisztika
- Valószínűség-számítás

**7–8. évfolyam**

- Halmazok, számhalmazok
- Matematikai logika, kombinatorika, gráfok
- Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök
- Arányosság, százalékszámítás
- Szöveges feladatok előkészítése
- Szöveges feladatok
- A függvény fogalmának előkészítése
- Síkbeli alakzatok
- Transzformációk, szerkesztések
- Térgeometria
- Leíró statisztika
- Valószínűség-számítás

**9–10. évfolyam**

- Halmazok
- Matematikai logika
- Kombinatorika, gráfok

– Számhalmazok, műveletek
– Hatvány, gyök
– Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során
– Arányosság, százalékszámítás
– Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek
– Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek
– A függvény fogalma, függvénytulajdonságok
– Geometriai alapismeretek
– Háromszögek
– Négyszögek, sokszögek
– A kör és részei
– Transzformációk, szerkesztések
– Leíró statisztika
– Valószínűség-számítás

**11–12. évfolyam**

– Halmazok, matematikai logika
– Kombinatorika, gráfok
– Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése
– Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus
– Exponenciális folyamatok vizsgálata
– Sorozatok
– Trigonometria
– Térgeometria
– Koordinátageometria
– Leíró statisztika
– Valószínűség-számítás
– Rendszerező összefoglalás

## 4.3. Változások a korábbi kerettantervhez viszonyítva

### *4.3.1. Változások az 1–4. évfolyamon*

A bevezetőben leírt gondolatok már régóta jelen vannak a hazai és külföldi matematikatanításban, viszont a megvalósulásuk gyakran nehézségekbe ütközik. Fontos tehát, hogy a gyakorlatban is alkalmazhatóvá váljanak ezek az elvek, és ezáltal a matematikatanítás színvonalát emeljék. Ezért:

- nem követelmény a gyakorlattól független mértékváltás;
- nem követelmény a műveleti tulajdonságok, oszthatósági szabályok, illetve bizonyos matematikai fogalmak megnevezése;
- nem követelmény a valós helyzetektől függetlenül ismerni a műveleti sorrendeket és használni a zárójelet;
- nem követelmény a valós szituációtól független ismeretlen szimbólumok használata és az azokkal való számolás;
- nem követelmény a római számok és arab számok közti átírás 30-nál nagyobb számok esetében;
- törtrészeket értelmezünk kirakással, rajzzal adott modelleken a szükséges jelölésekkel.

A pénzügyi tudatosságra nevelés nagyobb hangsúlyt kap. Eddig is jól használható eszközként jelentek meg a játékpénzek, és jelen volt a negatív számok adósságként való értelmezése, de most érdemes tudatosítani, hogy ezen tevékenységek valóban fontosak, nem csak játékosak, nem elhagyhatók, és nem csupán a matematikai ismeretek megalapozásához szükségesek. A szöveges feladatokban, problémákban a gazdasággal kapcsolatos témáknak is meg kell jelenniük, már a kisiskolások szintjén.

#### Az 1. évfolyam változásai

*Előkészítő időszak*

Az iskolába lépő gyermekek igen különböző háttértudással rendelkeznek, képességeikben és készségeikben eltérő fejlettségi szinten állnak. A Nat ezért az előkészítő időszakot a korábbi 6 hétről az egész első félévre módosította, hogy valóban megvalósulhasson a tanulócsoport tanulmányi összehangolása. Ebben az időszakban a készségfejlesztésen van a hangsúly, de ez nem jelenti azt, hogy a tanulók ismereteit ne bővítenénk. Az első osztályos gyerek motivált, kíváncsi, olvasni-írni-számolni szeretne, és erre a természetes vágyára is figyelni kell. Ezért a tanév elején sok időt kell szánni a fejlesztésre, és kevesebbet az ismeretekre. A különbség fokozatosan csökken, és az előkészítő időszak végére (félévkor) kiegyenlítődik. Az ismeretek biztosítása mellett a készségfejlesztés egész alsó tagozaton jelen marad, és nem zárul le az előkészítő időszakkal.

Ahhoz, hogy a gyerekek a szervezett tanulásra kellőképpen fel legyenek készülve, rendelkezniük kell bizonyos készségekkel, képességekkel. Ezek a következők:

- A figyelem irányíthatósága; a megfigyelés tudatossága: érzékelhető tulajdonságok kiemelésének képessége, egész és rész viszonyának felfogása. Összehasonlítás, megkülönböztetés, eltérő és azonos tulajdonságok kiemelése személyekről, tárgyakról, mennyiségekről, térbeli, síkbeli alakzatokról.
- Emlékezetbe vésés és felidézés tudatossága.
- Adott tulajdonság (esetleg adott szempont) szerinti válogatás.
- Egyszerű állítások igazságértékének eldöntése; a döntési képesség és igény megléte.
- A hétköznapi életben is gyakran előforduló mennyiségi viszonyok felismerése nem túl kis eltérések esetén (pl. kisebb, nagyobb, alacsonyabb, magasabb, hosszabb, rövidebb, könnyebb, nehezebb, több, kevesebb, ugyanakkora, ugyanannyi…); a megfelelő szavak értő használata; a mennyiségek állandóságának belátása.
- Térbeli tájékozódás (egyszerű utak bejárása oda-vissza). A téri tájékozódásban alkalmazott relációs szókincs értése (például: alatta, mellette, utána, alá, fölé, mellé, között, bal-jobb).
- Időbeli tájékozódás (elmúlt esemény, még be nem következett esemény; van-volt-lesz; előbb, később, előtt, után).
- Egyszerű sorozatok folytatása (pl. taps, koppantás-koppantás, taps, koppantás-koppantás, taps; virág, szív, virág, szív… stb.).
- Szekvenciák alkalmazása (cselekvés, esemény, rajz…).
- Számlálás: a számok nevének ismerete 10-ig, leszámlálás, megszámlálás (szem-kéz koordináció megléte, egyeztetés).
- Számkép felismerése rendezett alakban legalább 6-ig (pl. dobókockán). Darabszám átlátása rendezetlen összességek esetén 4-ig (eltérő tulajdonságú, méretű tárgyak, dolgok esetén is).

Az előkészítő időszakban folyamatosan figyeljük meg a tevékenységek során, hogy a tanulók ezeken a területeken megfelelő fejlettségi szinten vannak-e! A hiányokat pótoljuk, ezeket a területek erősítsük meg, hogy majd a második félévben továbbfejleszthessük!

### A 2. évfolyam változásai

Hangsúlyossá vált (külön témakör is jelzi) a **számrendszeres gondolkodás** fejlesztése tevékenységekkel, eszközökkel.

Hangsúlyossá vált a **szorzás** fogalmának, a szorzótáblák épülésének és kapcsolataiknak a megértése. Az ezekhez kapcsolódó fejlesztési feladatok is mindenképpen megkívánják a tevékenykedtetést, ami természeténél fogva időigényes. Ezért a kerettanterv nem várja el, hogy 2. osztályban az összes szorzótáblát készségszinten alkalmazzák a gyerekek. Néhány szorzótáblát (6-7-8) elég, ha a felfedezett összefüggések alapján vagy valamilyen megismert számolási eljárással tudnak kiszámolni. A 3. évfolyam első félévében a szorzótáblák ismeretét célszerű készségszintre hozni, ugyanis ez a továbbhaladáshoz feltétlenül szükséges. Ha valaki egy második osztályos év végi dolgozatban nem tudja gondolkodás nélkül a 6·8-at, viszont pontosan ki tudja számolni, akkor teljesítette a követelményt, és lehet 5-ös az év végi érdemjegye. A dolgozatok, számonkérések összeállításakor tehát érdemes erre odafigyelni.

A **törtrész** fogalmának csak előkészítése történik meg ezen az évfolyamon az osztáshoz kapcsolódóan.

### A 3–4. évfolyam változásai

Harmadik osztályban, az első félévben a szorzás átismétlése mellett az automatizálás megvalósítása is fontos feladattá vált, és erre a tanító mellett a tankönyvszerzőknek is oda kell figyelniük a tananyagtartalom összeállításakor.

A törtrész fogalmának kialakítása szintén a 3. évfolyamon kezdődik meg. A 4. osztályban is a már megismert jelöléssel írjuk le az egységtörtek többszöröseit (pl. 3 negyed), és nem térünk át arra, hogy törtvonallal elválasztott számokkal jelöljük a törtrészek nagyságát.

**Az 1–4. évfolyamon eddig megtanított ismeretek közül a felső tagozatra kerülő ismeretek**

- A római számok és arab számok közti átírás 30-nál nagyobb számok esetében.
- Az írásbeli osztás algoritmusának megtanítása kétjegyű természetes osztóval
- Műveleti sorrend és zárójelhasználat aritmetikai feladatokban
- Mértékváltás

### *4.3.2. Változások az 5–8. évfolyamon*

**Változások az 5–6. évfolyamon**

Az alsó tagozaton a korábbi tanterv alapján megtanított ismeretek közül az 5–6. évfolyamra került:

- az L, C, D, M római számok;
- az írásbeli osztás algoritmusa kétjegyű természetes osztóval.

Az 5–6. évfolyamon a korábbi tanterv alapján megtanított ismeretek közül a 7–8. évfolyamra került:

- a „minden” és a „van olyan” logikai szakkifejezések ismerete és használata;
- kiválasztás a sorrend figyelembevételével vagy anélkül;
- a racionális szám és a végtelen szakaszos tizedes tört kapcsolata;
- szöveges feladat megoldása egyenlettel (5–6. évfolyamon nincs mérlegelv, a feladatok megoldása tervszerű próbálgatással, következtetéssel történik);
- az algebrai kifejezés;
- az egyenes arányosságot leíró hozzárendelés grafikonjának ábrázolása;
- a háromszög külső szögeinek összege;
- négyszög belső és külső szögeinek összege;
- speciális négyszögek és szerkesztésük;
- kör fogalma, kör részei.

*Újdonságok*

A kor igényeihez igazodva új témaként jelennek meg a pénzügyi és gazdasági ismeretek. A feldolgozott feladatok megfelelnek a korosztály érdeklődési körének, olyan hétköznapi problémákat érintenek, amelyekről a tanulók alapvető ismeretekkel rendelkeznek.

Az egyszerű stratégiai, logikai, pénzügyi játékok és társasjátékok a mindennapi matematikatanítás részévé válnak. Nemcsak a matematikaóra hangulatának javítása a cél, hanem fontos fogalmak megalapozása, játékos előkészítése is.

Az alsó tagozat játékos tevékenységei és a felső tagozat számolási feladatai között megfelelő átmenetet képez a „Mérés és mértékegységek" témakör. Az egyenes és fordított arányosság megértését készíti elő a mérőszám és mértékegység viszonyának megfigyelése a tényleges mérési feladatok elvégzése során. A manuális tevékenységek a mennyiségek gyakorlati becslésének képességét fejlesztik. A méréseket gyakorlati helyzetekben alkalmi és szabványegységekkel végezzük, és használjuk ki a közvetlen környezet adta mérési lehetőségeket!

Fontos, hogy a térszemlélet fejlesztése érdekében képek, nézetek, alaprajzok, hálók alapján építményeket és testekről, építményekről nézeti rajzokat, alaprajzokat, hálókat készítsenek a tanulók. Ne elégedjünk meg a tankönyvi ábrák tanulmányozásával, szánjunk időt a tényleges tevékenységre!

Emelkedett a statisztika és a valószínűség-számítás témakör óraszáma. A hangsúly mindkét témában a játékosságon és a megtapasztaláson van, ami fontos előfeltétele a későbbi absztrakciónak. Minden játékot kövessen értelmezés, matematikai szempontú megfontolás!

## Változások a 7–8. évfolyamon

A 7–8. évfolyamról a korábbi tanterv alapján megtanított ismeretek közül a 9–12. évfolyamra került:

- hatványozás fogalma pozitív egész kitevővel a negatív egész számok körében;
- hatványozás azonosságai;
- négyzetgyök fogalma;
- algebrai kifejezés;

- egyismeretlenes elsőfokú egyenlőtlenség megoldása, azonosság és azonos egyenlőtlenség fogalma;
- speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet) ismerete (7–8. évfolyamon az ábra alapján történő felismerés és a legfontosabb tulajdonságok megállapítása az elvárás);
- kör kerülete és területe;
- eltolás, vektor, párhuzamos szárú szögek;
- egybevágóság, a háromszögek egybevágóságának alapesetei;
- forgáshenger, forgáskúp;
- forgáshenger felszíne és térfogata.

*Újdonságok*

Bővül a pénzügyi és gazdasági ismeretekkel foglalkozó témakörhöz kapcsolható konkrét feladatok köre. Érdemes a tanulókat tájékoztatni a banki tevékenységek típusairól (ügyfélcsomagok, számlavezetési, megbízási és tranzakciós díjak), a megtakarítási és hitelfelvételi lehetőségek alapvető buktatóiról. A témához kapcsolódó feladatok tartalmazhatják az egyes ajánlatok összehasonlítását és a választott lehetőség indoklását.

A pozitív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványát alkalmazzuk a természetes számok prímtényezős felbontásának felírásánál, mértékegységek átváltásánál, számrendszerek helyi értékeinek felírásánál! Más témakörben nem jelenik meg a hatványozás, ezért csak a pozitív egész alapú hatványok értelmezését várjuk el!

A Pitagorasz-tétel alkalmazása szükségessé teszi a négyzetgyök fogalmának előkészítését. A négyzetszámok négyzetgyökének kiszámolása segíti a fogalom megértését. Más számok négyzetgyökének közelítő értékét számológép segítségével számolják ki a tanulók!

A korábbi tantervben használt „algebrai kifejezés” helyett „betűs kifejezés” szerepel a kerettantervben. Szűkül a betűs kifejezésekkel végzett műveletek köre is. A korábbi tantervekben az Egyenletek témakört megelőző „Algebrai kifejezések” című téma helyett a „Szöveges feladatok előkészítése” címet találjuk. A témakörben a szöveges feladatok megoldásához szükséges algebrai modellek megismertetése történik.

A gyakorlat oldaláról közelítjük meg a testek közül a gömböt is. A gömb mint a Föld modellje jelenik meg. A hosszúsági körök, szélességi körök tulajdonságai, a síkmetszetek kitekintési lehetőséget adnak a gömbi geometria felé.

A korábbi tantervhez képest emelkedett a statisztika és a valószínűség-számítás óraszáma. A nagyobb óraszám lehetővé teszi a saját kutatások végzését, az adatok tervszerű gyűjtését, rendezését és ábrázolását digitálisan is. A valószínűségi játékok eredményét és a kísérletek kimenetelét a statisztikában szerzett tapasztalatok, ismeretek alkalmazásával a tanulók rendszerezik és feldolgozzák. Ennek során a relatív gyakoriság alapján becsléseket adhatnak arra, melyik esemény bekövetkezésének nagyobb az esélye.

### 4.3.3. Változások a 9–12. évfolyamon

**Változások a 9–10. évfolyamon**

A 7-8. évfolyamról a 9-12. évfolyamra kerülő tananyagról az előző fejezetben írtunk.

*Újdonságok*

A tantervben kötelező elemként megjelenik bizonyos tételek bizonyítása. Olyan tételekről van szó, amelyek bizonyítása egyszerű, könnyen megérthető, szemléltethető. (Ilyen például a háromszög oldalfelező merőlegesei és a belső szögfelezői metszéspontjára vonatkozó tétel vagy a Pitagorasz-tétel bizonyítása.)

Szintén újdonságot jelent, hogy a tantervben megjelennek a stratégiai és logikai játékok a tanóra részeként.

Kisebb változás, hogy ezentúl a konvex sokszög külső szögeinek összegére vonatkozó összefüggést is ismerniük kell a tanulóknak.

*Kimaradó anyagrészek*

- Algebrai tört fogalma és alkalmazása, és ennek megfelelően a lineáris törtfüggvények ábrázolása, jellemzése.
- Abszolútértéket tartalmazó egyenletek megoldása.
- A másodfokú kifejezéseknél a gyökök és együtthatók összefüggései. Másodfokú egyenletrendszer megoldása.
- Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között.

– $\sqrt{ax+b}=cx+d$ helyett $\sqrt{x+c}=ax+b$ megoldása elegendő.
– A függvénytranszformációk közül f(cx) ábrázolása.
– Magasságtétel, befogótétel a derékszögű háromszögben.
– Szög ívmértéke.

*Átkerült a 11–12. évfolyamra*

– Számelmélet, számrendszerek.
– Hasonló síkidomok kerületének, területének aránya. Hasonló testek felszínének, térfogatának aránya.
– A szögfüggvények értelmezése hegyesszögekre (szinusz, koszinusz, tangens).
– Vektor szorzása valós számmal, vektor koordinátái.

**Változások a 11–12. évfolyamon**

*Újdonságok*

– Sorozatok témakörében:
  • Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása.
  • Gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet számítása.
  • Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása.
– Térgeometria témakörében: főleg a közvetlen környezetünkben előforduló testekkel foglalkozunk. Tudni kell meghatározni a forgatással keletkező testek térfogatát és felszínét, le kell rajzolni bizonyos testek hálóját.
– Statisztika és valószínűség-számítás témakörében: kvartilisek és ehhez kapcsolódóan a box-plot (sodrófa) diagram ismerete, továbbá a geometriai valószínűség szemléletes ismerete és alkalmazása egyszerű feladatok megoldása során.

*Kimaradó anyagrészek*

– Logaritmus függvény, logaritmus azonosságai, logaritmusos egyenletek.
– Függvény inverze.

– Az egyenes egyenletének normálvektoros és irányvektoros alakja, kör és egyenes kölcsönös helyzete a koordinátageometriában.
– Két vektor skaláris szorzata.
– A valós számok halmazán értelmezett trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása és trigonometrikus egyenletek megoldása.

## 5. Témakörökhöz kapcsolódó módszertani javaslatok

### *5.1. 1–4. évfolyam*

Az alsó tagozatos matematikatanítás tananyagának egyes részei szorosan összefüggnek egymással, nagyon nehezen különíthetők el bizonyos témakörök, amelyek felső tagozatban, majd gimnáziumban sokkal különállóbban is megjelennek.

Ezekhez a nehezen szétválasztható témakörökhöz óraszámokat rendelni igencsak nehézkes, egyrészt az átfedések miatt, másrészt mert az alsó tagozatos kisgyereknek szüksége van egy tanórán belül bizonyos időközönként tevékenységváltásra. Viszont mivel alsó tagozaton a tantárgyak közötti szoros kapcsolat jól megvalósítható, és a tantárgyon belüli koncentráció lehetősége is adott, ezért az óraszámokból adódó nehézségeket feloldja az, ha egy tanítási órán többféle témakörhöz kapcsolódó tevékenységek is előfordulnak. A javasolt óraszámok tehát nem jelentenek merev határokat. A gyerekek nem fognak 45 percen keresztül szöveges feladatokat megoldani, vagy műveleti tulajdonságokkal foglalkozni, vagy számolni, mint ahogy 45 percen keresztül valószínűségi játékokat sem fognak játszani, sem halmazokat vizsgálni.

A javasolt óraszámok arra utalnak, hogy egy-egy témakör hozzávetőlegesen hány órának adja a fő témáját. Az egyes témakörök közt valamiféle arányra utalnak, de ez az arány nem jelent fontossági sorrendet, csupán annak az időnek az aránya, amit az adott témakörrel tanóra keretei között tudunk foglalkozni. Az eddigi kerettantervekhez képest a hangsúly inkább a gondolkodás fejlesztésének irányába tolódik, ami mellett természetesen nem fog sérülni a tanítási gyakorlatban a számolási készség fejlesztése sem. Ugyanakkor azt fontos kiemelnünk, hogy a számolási készség fejlesztése nem egyedüli feladata a matematikatanításnak, és erre jobban fel kell hívni a szakma figyelmét.

Javasoljuk a heti bontású tanmenet használatát, hiszen a tanítási gyakorlatot így lehet a gyerekek fejlettségéhez, tudásához igazítani. Hiba azt sugallni, hogy órára lebontva tervezhető, hol fognak tartani a tanulók a tanév egy távoli pontján. A soron következő óra pontos céljait, feladatait, tartalmát mindig aktuálisan kell megválasztania a tanítónak, figyelembe véve a tananyagban való folyamatos előrehaladást is, melyről egy nagyobb léptékű tanmenet jó visszajelzést tud adni.

**Válogatás, halmazok alkotása, vizsgálata**

A halmazokkal, rendszerezéssel, állításokkal kapcsolatos tevékenységek alapvetőek a gondolkodás fejlesztése szempontjából. Különféle egyedi elemek, alkalmi együttesek, valamilyen szempontból rendszert alkotó halmazok, logikai készletek megfigyelésével, a róluk alkotott állítások segítségével változatos reprezentációkban gyakorolhatjuk a gondolkodási műveleteket. Kezdetben olyan válogatásokat végeztessünk, ahol megfigyeljük az elemek eltérő tulajdonságait, majd közös rész nélküli halmazokba válogatunk! Válogassunk adott tulajdonságú elemeket egy halmazba, majd nevezzük meg a halmazba nem tartozó elemek csoportját is! (Ezt nevezzük kétfelé válogatásnak.) Később két olyan halmazba válogatunk, amelyek közül az egyik részhalmaza a másiknak; ezzel alapozzuk meg az alá- és fölérendelt fogalmak egymáshoz való viszonyát. Csak ezután foglalkozzunk olyan két szempontú válogatással, ahol lesznek olyan elemek, amelyek mindkét tulajdonsággal rendelkeznek; lesznek, amik csak az egyikkel; és lesznek olyanok, amik egyikkel sem. (Ezt nevezzük kétszer kétfelé válogatásnak.)

A halmazok elemeit 1–2. osztályban a gyerekek megszemélyesíthetik saját tulajdonságaikkal, jellemzőikkel, illetve különböző tárgyakat, képeket, eszközöket is válogathatnak tetszőleges vagy megadott szempont szerint. Az is fontos, hogy egy megkezdett válogatásnál találják meg a válogatás szempontját. Következő lépcsőfok, ha megadott helyre kell helyezni az elemeket, például hulahoppkarikába vagy dobozokba, papírlapokra. Ilyenkor dönteni kell az elemek elhelyezésekor, és értik a gyerekek, hogy egy dolgot csak egy helyre tehetnek. Ha csak a dolgok nevét vagy jelét kell leírva elhelyezniük (például számok, dolgok elnevezése), akkor nem feltétlenül világos számukra, hogy azt is csak egy helyre lehet írni. Erre éppen a tevékenységek hívják fel a figyelmüket. Amikor egy dolog több vizsgált tulajdonsággal is rendelkezik egyszerre, de nem látható a halmazok közös része, akkor problémát jelent a tanulók számára, hogy melyik tulajdonság szerint kijelölt helyre tegyék. Ilyenkor a konkrét kirakásban – és a saját fejükben is – kénytelenek a halmazok határának módosítására, és létre kell hozniuk egy közös részt. A konkrétan kirakott halmazokat körülrajzolják vagy lerajzolják, és így alakul ki, válik érthetővé a tanulók számára a Venn-diagramos ábrázolás két vagy több halmaz esetére. A Venn-diagramnál fontos, hogy ne ábrázoljunk halmazokat alaphalmaz nélkül.

Erősen függ a tanulócsoport összetételétől és a tanulók egyéni különbségeitől, hogy milyen ütemben tudnak elmélyülni ebben a témakörben, és hogy milyen absztrakciós szinteket tudnak meglépni. A folyamatot siettetni nem érdemes, viszont fontos a folyamatos előrehaladás és az absztrakciós fokozatok betartása.

**Rendszerezés, rendszerképzés**

A rendszerezés a matematika minden területén alapvető fontosságú, ezen túl pedig más tartalmú tudáselemek megértéséhez, emlékezetbe véséséhez és felidézéséhez is szükségszerűen hozzájárul. Gyűjtött adatokat, szöveges feladatokban szereplő adatokat válogatunk, rendszerezünk különböző szempontok szerint, figyelembe véve a köztük lévő kapcsolatokat. Különböző dolgokat, számokat, alakzatokat rendszerezünk tulajdonságaik szerint. Különböző feltételeknek megfelelő alkotásokat hozunk létre számokból vagy geometriai tevékenységek során. Az alkotások felsorolásakor szisztematikusan keressük a lehetőségeket, ennek eredményeként a gyerekek megtapasztalják, hogyan érdemes keresni. 1–2. osztályban nem igény a feltételeknek megfelelő összes alkotás létrehozása. Később ez fokozatosan előtérbe kerül. A gyerekek a dolgokat rendszerezhetik különböző elágazásos útvonalak tényleges és szimbolikus bejárásával, ahol az elágazásoknál egy-egy tulajdonság meglétével lehet csak „behajtani" egy „utcába". Ezek a tevékenységek alapozzák meg az ágrajz modellt.

A következő fokozat 3–4. osztályban az összes lehetőség rendszerezett felsorolása. Fontos, hogy minden egyes lehetséges kirakás egyszerre jelenjen meg a tanulók előtt, mert ez ad lehetőséget a csoportosításra, rendszerezésre, amivel indokolhatjuk, hogy nincs több lehetőség. A kirakások után táblázatokat, ágrajzokat használunk a rendszerezésre.

Fontos a fokozatosság betartása a feltételek számának és a felsorolandó lehetőségek számának növelésekor is. Alsó tagozaton még általában korai a kombinatorikai jellegű problémák szorzással való megoldása. Kivételesen előfordulhat, hogy a feladat értelmezése, az ágrajz, a felsorolás alapján a rendszer felismerése után a tanulók maguktól jönnek rá az összes lehetséges kirakás számára. Ez ellenőrzésként is szolgálhat nekik arra, hogy minden lehetőséget megtalálták-e. Mindenképpen legyenek olyan problémák, amikor a szorzás nem alkalmazható! Semmiképpen se erőltessük a bevezetését, mert a korai absztrakció gátolja a megértést és sematikussá teszi a tanulók gondolkodását!

### Állítások

A matematikafeladatok olvasása, az állítások megfogalmazása, értelmezése a szövegértést fejleszti. A gyerekek ekkor kezdik tanulni a matematika nyelvét, a kötőszavak jelentőségét, a pontos beszéd fontosságát és a megfogalmazott állítások igazságának megítélését. Ennek a folyamatnak az első állomása, hogy olyan állításokról mondanak véleményt, olyan állításokat fogalmaznak meg, amelyek konkrét dolgokhoz, tárgyakhoz kötődnek, sokszor valamilyen elvégzett válogatáshoz, halmazokhoz kapcsolódnak. Például tulajdonságokról, köztük lévő viszonyokról szólnak, vagy az összességet jellemzik: „van közte…", „nincs közte…", „mindegyik…", „egyik sem…". Hasznosak a különböző barkochba játékok, melyeket egyre nehezedő változatokban érdemes játszani (például: kirakással, kirakás nélkül, hazudós barkochba, fordított barkochba).

Vizsgáljunk olyan állításokat is, amelyeknek hiányzik egy (főként az alanyi) része! Például „Az osztály tanulói közül *hmhmhm* szereti a borsófőzeléket", „A *hmhmhm* rúd rövidebb, mint a *hmhmhm* rúd". Ezeket az állításokat **hiányos állítások**nak hívjuk. A hiányos állításokat különbözőképpen próbáljuk kiegészíteni, és a kiegészítés után igyekszünk eldönteni, hogy igaz vagy téves (nem igaz, hamis) állítást kapunk-e. Tulajdonképpen a dolgokat kétfelé válogatjuk aszerint, hogy a hiányos állításokat melyek teszik igazzá, és melyek teszik tévessé. Konkrét dologhoz és tulajdonságaihoz kapcsolódó hiányos állítás vizsgálata után lehet megfogalmazni a dolgok számosságához kapcsolódó állításokat.

### Problémamegoldás

A problémamegoldó képesség fejlesztése a matematikatanítás központi feladata. Nincs olyan része a tanítási gyakorlatnak, amit ne kellene ezzel a szemlélettel átitatni. Ennek érdekében problémák kapcsán vetődnek fel az új ismeretek, építve a tanulók felfedezéseire.

Egy-egy ismerethez kötődő feladatok megfogalmazása változatos formában történjen! A **„típus" feladatok** a tanulóknak biztonságérzetet, jártasságot és önbizalmat adnak, ezért szükséges, hogy ilyeneket is megoldjanak, de vigyázni kell, hogy ne kösse meg a gondolkodásukat! A **változatos feladatok** biztosítják, hogy a tanulók képesek lesznek a tudást változatos helyzetekben alkalmazni, és így tudják megalkotni magukban a tudás rendszerét.

Próbáljunk olyan problémákat keresni, amelyek gyakorlatiasak, a gyerekek környezetéhez, mindennapjaihoz, természeti és gazdasági ismereteihez kötődnek! Igyekeznünk kell, hogy a zárt problémák konkrét megoldásának keresése helyett minél inkább **nyitott problémák**at vagy nyitottá tehető problémákat adjunk a gyerekeknek, amit többféleképpen lehet értelmezni és megoldani. Például ahelyett, hogy megkérdezzük, *„Hány forintunk van, ha 2 db 100 forintosunk, 1 db 50 forintosunk és 3 db 20 forintosunk van?"*, kérdezzük azt, hogy *„Hány forintunk lehet, ha 6 darab érménk van?"*, vagy *„Milyen érméink lehetnek, ha összesen 210 forintunk van?"*, vagy *„Ha az érméinket sorban ki tudjuk rakni egy 12 cm hosszú papírcsíkra, akkor mennyit érhetnek?"*, vagy *„Mennyit érhet egy marék érme?"*.

A **problémamegoldás lépései**nek végigjárása minden esetben szükséges, azonban a gyerekektől nem kell ezt lépésről lépésre számon kérni, elég, ha tudatosítjuk az egyes lépések fontosságát, és lassan saját gyakorlatuk részévé válik. Kezdjük a probléma értelmezésével, ami lehet a szituáció lejátszása, kirakása, lerajzolása, az adatok és kapcsolataik keresése. Ezután következik a tervezés, az összefüggések megfogalmazása, a probléma lépésekre bontása. A megoldás tervezése és a terv végrehajtása párhuzamosan történik, ugyanis nem lehet elvárni a gyerekektől, hogy előre tudják a megoldás összes lépését. Terveznek lépéseket, végrehajtják, közben ellenőrzik, hogy megfelelőek-e, majd a kapott eredményeket az eredeti szituációba helyettesítve ellenőrzik. Az ellenőrzésnek többféle módja és szintje van, nem kizárólag az ellentétes műveletek alkalmazása. Ezért fontos az ellenőrzés szerepének és változatos módjainak a megismertetése a tanulókkal. Fontos a többféle megoldási mód megbeszélése, a praktikus módszerek tudatosítása, új kérdések keresése a probléma kapcsán. Építsünk a tanulók kíváncsiságára, ösztönözzük a kérdésfeltevéseket, és adjunk lehetőséget arra, hogy megoldási módjaikat, ötleteiket megoszthassák egymással!

Fontos, hogy a gyerekek találkozzanak gondolkodást, következtetést igénylő problémákkal is – a klasszikus szöveges feladatok mellett –, illetve tanuljanak különféle stratégiákat: visszafelé gondolkodás, szakaszos ábrázolás stb.

## Szöveges feladatok megoldása

A szöveges feladatok megoldása kezdetben – sőt, sokszor vissza-visszatérve – nem valamilyen matematikai modell segítségével történik, hanem a gyerekek „belelátnak” az elmondottakba, és rögtön tudják a kérdésre a választ.

Maguknak a matematikai modelleknek (például: számfeladatnak, műveletnek, sorozatnak, táblázatnak) a kialakítása, értelmezése természetesen éppen a szöveges szituációk segítségével történik, és ez kissé erőltetett lehet a gyerekek számára. Ennek a hasznosságát majd akkor fogják értékelni a gyerekek, amikor összetettebb problémák kerülnek eléjük, illetve nagyobb, könnyen át nem látható számokkal találkoznak. Ezért fontos, hogy a feladat megoldását és a megoldás egyes lépéseit külön-külön is értékeljük.

A szöveges feladatok megoldási lépéseinél nagyon fontos a szöveg megértése, az adatok rendszerezése, a szövegből matematikai modell alkotása, majd a választott modellen belül a probléma megoldása. Ezt követi az eredmény értelmezése az eredeti szövegben megadott szituáció szerint, és az eredmény helyességének ellenőrzése, végül a feltett kérdésre történő válaszadás. Kezdetben egy feladat során ennek a rengeteg lépésnek az elvégzését nem várjuk el a gyerekektől, hanem fokozatosan bővítjük a szöveges feladatok kapcsán a teendőket, és akár csak egy-két teendőt kérünk számon egyszerre. Az egyes részfeladatokat külön-külön is értelmezzük, megvitatjuk szerepüket, helyüket, többféle módot keresünk az elvégzésükre. Így szép lassan kialakul a gyerekek számára a teljes megoldási menet, melyet 4. osztályban végig is tudnak vezetni.

A matematikatanítás érdekében is fontos a tanulók értő olvasási készségének, szövegértésének, szókincsének, összefüggéslátásának, memóriájának fejlesztése. Például az egyre bonyolultabb mesék, regények olvasásával az összefüggések, több szálon futó cselekményláncok követése; a lényeg kiemelése; memorizálás, verstanulás is segíti ezt a fejlesztést. Fontos fejlesztési feladat az, hogy a tanulókban egy szöveg alapján belső képek alakuljanak ki. A szöveges feladatok nyelvi és képi értelmezése kulcsfontosságú.

Az értelmezést segíti a szöveg történésének eljátszása, kirakása eszközzel, mely az értelmezésen túl rögtön modellként is szolgál, sőt sokszor el is vezet a megoldáshoz. Ilyen esetben sem kell ragaszkodni a matematikai nyelvre történő lefordításhoz vagy a kiszámoláshoz, hiszen a gyermekeknek az értelmetlen, mivel a problémát már megoldották. Viszont fontos megtanulni, hogy a konkrét kirakásokat, eljátszásokat milyen egyszerűbb rajzokkal lehet helyettesíteni, vagy számokkal és műveletekkel hogyan lehet kifejezni. Így amikor az eljátszás, kirakás nem lehetséges (nincs eszköz, nagyobb a számkör stb.), a gyerekek már más elvontabb modellekben is fognak tudni gondolkodni. Alsó tagozaton a „nyitott mondatok" erőltetése a feladatokban káros, mert túlságosan absztrakt, és megköti a gondolkodást. Bevezetése ráér felső tagozaton, amikor kellő tapasztalat és sokféle modell birtokában a gyerekek már megérnek rá.

Az értelmezés kapcsán fontos a szövegben lévő fontos információk kigyűjtése és ábrázolása, és ezek nem csak adatok lehetnek. Az adatok közötti kapcsolat értése sokkal fontosabb (például Andris 20 cm-rel alacsonyabb, mint Bea; Andris alacsonyabb, mint Bea, 20 cm-rel). Ennek végiggondolása, ábrázolása átmenet az értelmezés és a modellalkotás között. Adjunk olyan feladatokat is a gyerekeknek, amelyek felesleges adatokat tartalmaznak, vagy bizonyos hiányzó információkat pótolni kell!

Egyes képekkel kísért szöveges feladatokban elég csak a történet művelettel és számokkal történő megadása, a megoldás lerajzolása.

Kezdetben még a műveletek fogalmának elmélyítését szolgáló aritmetikai szöveges feladatok kerülnek elő egy-, majd többlépéses feladatokban. Később differenciáltan következtetést igénylő szöveges feladatok is szerepelnek, amelyek már a problémamegoldás témakörhöz tartoznak. Igyekezzünk tudatosan változatos szókinccsel, változatos szituációkkal (pl. változtatás, hasonlítás, egyenlővé tevés) és változatos nyelvtani formákkal (időbeni változás, feltételes mód) megfogalmazni a feladatokat! Figyeljünk arra, hogy a tanulók ne a *„kulcsszófordítás"* alapján dolgozzanak (például: ha a „több" szó szerepel, akkor mindig összeadást vagy szorzást kell végezni)! Adjunk fordított szövegezésű feladatokat is a gyerekeknek!

A gyerekek már a tanulás folyamatában is alkossanak szöveges feladatokat például különböző képek vagy adatok alapján, vagy adott matematikai modellhez, vagy számokhoz és műveletekhez, vagy kérdéshez, válaszhoz!

Próbáljuk a matematikai ismereteket hétköznapi szituációba helyezni, gyakoroljuk az életkornak megfelelő pénzügyekkel kapcsolatos helyzeteket!

### Szám és valóság kapcsolata

Ebben a témakörben a fő feladat az, hogy segítsünk a gyerekeknek a számhoz mint absztrakcióhoz eljutni. Ez csakis úgy történhet, ha egy-egy számról rengeteg tapasztalatot szereznek. Darabszámként, mérőszámként, értékmérőként, tő- és sorszámként is újra és újra előkerülnek ugyanazok a számok, összehasonlítják más számokkal, míg végül hordozótól függetlenül kialakulnak a számról, nagyságáról és kapcsolatairól alkotott absztrakciók.

Az előkészítő szakasz feladata alapvetően a különböző érzékszervek bevonásával a darabszámok és mennyiségek összehasonlítása, a halmazok elemszámának egy-egyértelmű leképezése, az „ugyanannyi", „ugyanakkora" tudatosítása. Ennek a szakasznak a végére a gyerekek ránézésre felismerik a kis elemszámú halmazok elemszámát ismert számképeken, és változatos elrendezésben is, ahol a különféle bontott alakokban való megjelenés segíti a sokaság felismerését. Nagyon fontos a számok sokféle alakban való látása, különféle tagolása, a számok bontása főleg kétfelé, de a többfelé bontások is elengedhetetlenek (például 1+2+3+4; 4+4+4+4). A számkörbővítések során a gyerekeknek konkrét képhez, kirakáshoz kapcsolódva kell tudniuk megfogalmazni a számok sokféle alakját (nevét) különféle műveletes alakban. A számok bontását 1–10-ig sokféle szemléltetéssel, kirakással, színes rudas szőnyegezéssel, játékokkal addig kell gyakorolni, amíg automatikus nem lesz. Ez nemcsak a számfogalom mélyítését szolgálja, hanem a tízes átlépéses összeadáshoz is elengedhetetlen. Nemcsak bontott alakokat, hanem hiányos alakokat is nagyon fontos megtapasztalniuk. Például számlálás nélkül, ránézésre meg lehet mondani, hány bonbon van, amikor a 6 darabos bonbonos dobozból hiányzik két bonbon, vagy tudni lehet a korongok számát, ha a 3×3-as alakzatban kirakott korongok közül hiányzik egy korong.

Ettől a témakörtől el nem választható kiegészítő témakörök, melyek közösen alkotnak egy egységet: számlálás, becslés; számok rendezése; számok tulajdonságai; számok helyi értékes alakja; mérőeszközök használata, mérési módszerek. Első osztályban a 20-as számkör minden számáról gazdag tapasztalatot kell szerezni, majd második osztálytól főleg a számrendszeres gondolkodás fog segíteni abban, hogy a tanulók a számok között eligazodjanak. Második, harmadik és negyedik osztályban sem szűnhet meg az a gyakorlat, hogy a tanulók néhány számról konkrét tapasztalatot is szerezzenek leszámlálással, megszámlálással, kirakással, méréssel, és egy-két számot ténylegesen összehasonlítsanak a valóságban is. Csak így alakulhat ki helyes képük a számok nagyságáról, a nagyságrendekről. Nagyobb számokat lehet csoportosan is számláltatni, majd a sok leszámlált egységet összetenni. Például: „Mennyi befőttesüvegbe fér bele 1000 vagy 10 000 babszem? 10 csoport számláljon le 100-100 darabot!" De egyes tanulók egyénileg is szeretnek elszámolni egyesével 1000-ig, ők megoszthatják társaikkal tapasztalataikat (mennyi ideig tartott, tévedett-e, kellett-e újra számolni stb.). Fontos megismerniük a közelítő számlálás módszereit, mely során megelégszünk a körülbelüli, nagyságrendi értékekkel.

**Számlálás, becslés**

A számlálás a számfogalom alakulásának egyik összetevője, amit tudatosan össze kell kapcsolni az összességhez tartozó darabszámmal. Erre nagyon hasznosak például azok a társasjátékok, amelyekben dobókockával dobott számot kell lelépni a játéktáblán. Figyeljünk arra, hogy gyakoroljuk a visszafelé számlálást és a valahányasával történő számlálást is. Ötösével, tízesével, kettesével, hármasával, négyesével oda is és visszafelé is jól kell tudniuk számlálni a tanulóknak!

A becslés során egy adott mennyiséggel kapcsolatos hozzávetőleges nagyságrendi érzetet szeretnénk társítani egy konkrét számhoz. Becslést végzünk a mindennapokban például akkor, amikor szeretnénk tudni, vajon jut-e mindenkinek ülőhely egy buszon; vajon milyen nehéz a szatyrunk a vásárlás után; a kosárba rakott termékekért körülbelül mennyit kell majd fizetnünk. Becslésünk alapját a számlálás és a mérés adja, az, hogy sok tapasztalattal rendelkezünk egy-egy szám, mennyiség nagyságáról. Amíg a gyermekeknek nincs kellő tapasztalata, becslésük nagyon eltérhet a tényleges számosságtól. Viszont már a kezdetektől érdemes becsültetni, mert éppen a becslés világít rá arra, hogy szükséges a számlálás, mérés, és egy rosszul megbecsült dolog leszámlálásakor, mérésekor nagyon megjegyzik, hogy ez éppen mennyi volt. Majd amikor ismét „ugyanannyiról" kell becsülni, de az kisebb vagy nagyobb egységekből áll, akkor újra kell értékelniük a számokról és mennyiségekről alkotott fogalmukat. A nagyobb számok fárasztó leszámlálása pedig megnöveli a becslés, a közelítő értékekkel való számolás jelentőségét.

Jellemző, hogy a gyerekek szeretnék pontosan eltalálni az adott mennyiséget, és csak ezt értékelik jó becslésként. Ezért a becslések értékelésére külön időt érdemes szánni, ráadásul nagyságrendektől függően más és más becsült érték számít elfogadhatónak, hasznosnak. Megfigyelhetjük, ki mennyit téved a becslés során, de semmiképp se osztályozzuk a becslést! A gyerekek becslőképessége nagyon eltérő lehet, az a lényeg, hogy mindegyiküké fejlődjön. A jó becslésekhez különböző becslési módszereket érdemes a gyerekeknek elsajátítaniuk (például valamilyen egység alapján becslés az egészre, rendezés, csoportosítás, közelítő számlálás, közelítő mérés, újrabecslés), és ezekből választanak majd aszerint, hogy mikor melyiket érdemes alkalmazni.

Egy műveletsor eredményének becslése nem azonos a kerekített értékekkel való számolással! Ugyanis felső tagozattól kezdve nem csak a kerek tízesre kerekített értékeket hívjuk majd kerekített értéknek! A kerek tízesre, százasra, ezresre kerekített értékekkel való számolás csak egy lehetséges módja a becslésnek, amivel nagyon vigyázni kell, mert értelmét veszti, amikor alig könnyebb a pontos érték kiszámításánál. Készségszinten a 100-as számkörben való biztos számolást várjuk el, ezért 1000-es számkörben a kerek tízesekkel és 10 000-es számkörben a kerek százas értékekkel történő észszerű becslés elegendő.

## Számok rendezése

A számokat, mennyiségeket páronkénti összehasonlítások alapján növekvő, csökkenő sorrendbe rendezhetjük, ezzel fejlődik a tanulók algoritmikus gondolkodása. A számokat számegyenesen ábrázoljuk, ahol a számegyenes egységét, viszonyítási pontját az ábrázolandó számoknak megfelelően választjuk. Ez is segíti a számok nagyságrendjének látását. A számokat különböző számtáblázatokba rendezve jól megfigyelhető a számok épülési rendje. Az ilyen számtáblázatokban (például 0–99-ig és 1–100-ig) való jó tájékozódás nemcsak a számfogalmat erősíti, hanem a számolási eljárásokat is érthetővé teszi, a műveletek végzéséhez is hasznos segítséget nyújt.

A tájékozódást hiányos beosztású számegyenesen és „lyukas” számtáblán is gyakorolni kell. (Például 0–100-ig csak a kerek tízesek vannak megadva, vagy csak a 0 és a 100; a számtáblába csak egy-két szám van beírva, vagy akár egy sem.) A számszomszédok ismerete, megadása a számok rendszerének megértését, a nagyságrendjük megtapasztalását segíti.

A számszomszédok nem azonosak a kerekített értékekkel! A kerekítésnél az a döntő, hogy milyen kerek tízeshez, százashoz, ezreshez van közel egy szám. A gyerekek könnyen keverhetik a következő kifejezéseket: *kerek tízes, tízzel na-*

*gyobb, kerek tízes szomszéd* (nem csupán *tízes szomszéd!*), *tízesre kerekített érték* stb. (A gyerekek az analógiás gondolkodás alapján gondolják úgy, hogy ha az egyes szomszéd eggyel nagyobb-kisebb, akkor a „tízes szomszéd" tízzel nagyobb-kisebb. Erre a téves elképzelésre csak ráerősít, ha számok páros szomszédjait is tanítjuk a gyerekeknek.)

## Számok tulajdonságai

A számok tulajdonságainak vizsgálata a számfogalom kikristályosodását segíti úgy, hogy egy számról különféle képek alakulnak ki. A számok tulajdonságainak megismerésével érdekessé válnak bizonyos számok, illetve az is érdekes, ha egy szám nem rendelkezik egy adott tulajdonsággal. A számtulajdonságokat kifejezetten eszközök segítségével érdemes vizsgálni, mert csakis így válik értelmezhetővé egy-egy tulajdonság érdekessége. Például színes rudakkal épített lépcsők, piramisok, négyzetek, kockák, szőnyegezések vizsgálata, szöges táblán kifeszített alakzatok által határolt szögek száma, egy lap ismétlődő hajtogatásával keletkező részek száma, számegyenes felcsavarása különféle hasábokra stb.

A párosság, a többszörösök felfedezése, a többesével számlálás a szorzást, az oszthatóságot készíti elő. A számjegyek megfigyelésével a helyi értékes gondolkodás fejlődik. Ha a tanulók már kellő tapasztalattal rendelkeznek egy-egy számkör számairól, akkor a kitalálós játékok (például Ki vagyok én? Gondoltam egy számot!) fejlesztik a matematikai kommunikációjukat, rendszerező gondolkodásukat.

## Számok helyi értékes alakja

1. osztályban nem foglalkozunk a számjegyek helyi értékével, csupán megállapítjuk, mint számtulajdonságot, hogy vannak egyjegyű és kétjegyű számok. A számok tulajdonságai közt jó, ha megjelenik, hogy egy szám például hármasával kirakható-e, vagy hogyan tudjuk kifizetni csak 10 és 1 forintosokkal.

2. osztályban megkezdjük a számok bontását különböző csoportosítások alapján, még mielőtt a számkört bővítenénk. A csoportosítást indokolja, hogy a nagyobb mennyiségű dolgot már nem vagyunk képesek ránézésre a szemünkkel tagolni, számláláskor össze lehet zavarodni, csoportosítás nélkül az ellenőrzést mindig elölről kell kezdeni. Valahányasával (3-asával, 4-esével) csoportosítva is egy idő után túl sok csoport lesz, így praktikus újabb nagyobb csoportokat

létrehozni a kisebbekből. Ilyen csoportosítások szerint az apró tárgyak (átlátszatlan és átlátszó) csomagolása, a csomagolásokról leltárak készítése, szükséges beváltások és felváltások elvégzése alapozza meg a helyiérték-táblázat bevezetését, a számrendszeres gondolkodást. Gyerekek ábrákon is végeznek leltározási feladatokat, melyeket szintén a tényleges kirakások tesznek értelmezhetővé. A tényleges csomagolásokon túl különféle mennyiségeket is lehet ilyen módon vizsgálni, eszközökön további megfigyeléseket tenni (például színes rúd, Dienes-készlet). Azért is érdemes kis számok alapján csoportosítani, mert ott élhető át könnyen – és tevékenykedtetve többször is – a helyi értékek jelentése és jelentősége. Ezek után, amikor a gyerekek 10-es csoportosításokkal találkoznak, hirtelen világossá válik számukra, hogy a 100-ig sorolt számsor számnevei mit is jelentenek, és megértik a nyelvi rendszer mögött megbújó matematikai tartalmat is. Egyúttal képet kapnak a számok valódi nagyságáról, hogy miért nagyobb az 57-nél a 87, és mennyivel is nagyobb. Természetesen a felismerés után még sok konkrét tevékenység során szerzett tapasztalat és gyakorlás szükséges a számok 10-esekre és egyesekre történő bontásáról, hogy a számfogalmuk megerősödjön.

3-4. osztályban már erős számrendszeres látásmódra tudunk építeni a számkör bővítésekor. Segít, ha a gyerekek a helyi értékekről (1-10-100-1000) és azok nagyságrendjéről konkrét tapasztalatokat szereznek, ami által képesek lesznek elképzelni az 1405-öt, mint 1000 babszem és 400 babszem és 5 babszem összege. Az apró tárgyak csoportosításával, beváltásával és leltározásával építjük a helyiérték-táblázatot. 10 babszemet Kinder tojásba, 10 Kinder tojást tojástartóba rakunk, ezek jelentik a beváltást. Ekkor a tojásokban megtaláljuk a babszemeket, a tojástartóban ott van a 100 babszem. A babszemek helyett szemléltethetjük a számokat pénzekkel is, ami már egy lépés az absztrakció felé, hiszen a 10 forintosban már nem látjuk a 10 darab 1 forintost, a 100 forintosban a 10 darab 10 forintost. Az absztrakció következő lépése a helyi értékek bevezetése, a helyiérték-táblázat megalkotása a leltározások alapján. Az új fogalmak bevezetése kapcsán fontos megjegyeznünk, hogy nem a számnak, hanem egy-egy számjegyének van helyi értéke, alaki értéke (ami maga a számjegy) és valódi értéke. A helyi értékes gondolkodást nagyban segíti az abakusz vagy szorobán használata.

## Mérőeszközök használata, mérési módszerek

A Mérőeszközök használata, mérési módszerek témakör alsó tagozaton előkészíti, jól megalapozza a felső tagozatra átkerült mértékegységváltást. Ehhez sokféle tárgyi tevékenységre, konkrét mérések végrehajtására van szükség, sokféle mennyiség esetén, különféle alkalmi és objektív egységekkel, hogy a tanulók megtapasztalhassák a mennyiségek nagyságát, a fordított arányosságot, amelyet aztán felső tagozaton fognak egyre absztraktabb módon alkalmazni. A mérések során fejlődik a tanulók becslőképessége, valóságról alkotott képe. Alsó tagozaton a valóságban, méréssel megoldható problémáktól független mértékegység-használat és mértékegységváltás túl korai absztrahálást kívánna meg a gyerekektől, ezért az ilyen feladatokat kerülni kell. Az egységek sokszori kirakását egy idő után helyettesíthetjük skálázott mérőeszközökkel, ennek tudatosításához érdemes különféle mennyiségek esetén különféle egységekkel való méréshez mérőeszközöket készíteni a gyerekekkel.

Ezen tevékenységek után érdemes bevezetni a szabványegységekkel történő mérést, és sok tapasztalatot szerezni a szabványmértékegységek nagyságáról is. A különböző mértékegységek bevezetésekor figyelni kell a fokozatosságra, és arra, hogy a tanulók milyen számkörben mozognak.

A méréseket célszerű a gyerekek környezetében fellelhető tárgyakon végezni, és valódi vagy a gyerekek érdeklődését felkeltő problémahelyzetekben alkalmazni, gyakorolni.

## Alapműveletek értelmezése

A későbbi matematikai fejlődés megalapozásának egyik legfontosabb eleme az alapműveletek fogalmának mély ismerete. Ez nem azonos a műveletek során alkalmazott számolási eljárásokkal, a műveletek elvégzésének algoritmusával! A műveleteket darabszámmal és mennyiséggel is nagyon sokféle tárgyi tevékenységgel, sokféle szituációban, különböző nyelvi formákban kell értelmezni. Például az összeadás és kivonás jelenjen meg mint hozzáadás, elvétel; mint egyesítés és mint az egészből az egyik rész meghatározása; összehasonlításként; különbség kifejezéseként és egyenlővé tevésként! A szorzást egyenlő tagok összeadásaként értelmezzük. A szorzás fogalmának mély megértése és fejlődése alapozza meg az egyenes arányosságot, ennek következtében a törtrészszámítást, százalékszámítást. A bevezetés időszakában megkülönböztetjük az osztás bennfoglalásként és részekre osztásként való megjelenését. Az egyes műveletekre vezető sokféle szöveget tudatosan kell variálni a későbbiek során is, hogy a tanulók műveletfogalma ezzel is mélyüljön, és szövegértésük fejlődjön. A műveletek értelmezésének tudatosításához elengedhetetlen, hogy a gyerekek gyakorolják a számokkal felírt műveletekhez különböző kirakások, képek készítését, történetek, szöveges feladatok alkotását.

A szorzás fogalmának bevezetése után olyan összefüggéseket, szóbeli számolási eljárásokat tanítunk változatos eszközök segítségével, amelyek mélyítik a szorzás fogalmát, előkészítik a szorzótáblákat. Például hajtogatásokkal, korongokkal, színes rudakkal történő kirakások segítségével fogják megérteni, hogy egy szám kétszerese a szám 4-szeresének a fele, vagy hogy mennyivel kisebb egy szám 10-szeresénél a szám 9-szerese. Ezek, a tapasztalatok alapján megértett kapcsolatok segítik majd a gyerekeket abban, hogy később könnyebben, gyorsabban és pontosabban el tudják végezni a műveleteket. A szorzótáblák ilyen differenciálása segíti a számolási nehézségekkel küzdő tanulókat az analóg gátlás leküzdésében.

## Alapműveletek tulajdonságai

Az alapműveletek értelmezése és tulajdonságainak vizsgálata szorosan összetartozik. Az összeadás tagjainak, a szorzat tényezőinek felcserélhetőségét tevékenységekkel, kirakásokkal tapasztalhatjuk, szemléltetéssel indokoljuk, nem a műveletek eredményének kiszámításával! Gyakoroljuk a műveletek visszafelé való elvégzését, a szövegben ennek felismerését (például: melyik az a szám, amelynek kétszerese 48)!

3–4. osztályban új ismeret a műveletekben szereplő számok változtatásainak hatása az eredményre. Például a különbség változása elengedhetetlen az írásbeli kivonás tanításához, a szorzat és a hányados változásainak megfigyelése pedig a nagyobb számkörben végzett szorzás és osztás analógiáinak értelmezéséhez. A műveleti tulajdonságok megtapasztalását segíti a számok sokféle műveletes alakban való látása.

## Szóbeli számolási eljárások

A szóbeli számolási eljárások főleg a műveletek fogalmára és tulajdonságaira épülnek, azt tanítjuk a gyermekeknek, hogy mit és hogyan érdemes számolni.

1. osztályban a legtöbb eljárás épít az alakuló számfogalomra, és a számok különféle tagolásához (műveletes alakjához), valamint a műveletértelmezésekhez kapcsolódik, például a kettesével való hozzáadás-elvétel, az egyenlő tagok összeadása, a tízes átlépés módszere. Cél, hogy a tanulókat minél változatosabb számolási eljárásokkal ismertessük meg, és hogy azokat megtanulják váltogatni aszerint, hogy az adott számoláshoz melyiket érzik praktikusnak.

2. osztályban a számkör bővítése egy lépésben történik meg 100-ig: az analógiás gondolkodás alapján a műveleti tulajdonságok alkalmazásával, és a számok tízesekre és egyesekre történő bontásával. A számkör bővítése magában foglalja a számlálást, a számegyeneseken és a 100-as táblákon való eligazodást. Erre épül a szóbeli összeadás és kivonás tanítása. 2. osztályban ismételjük és bővítjük a számolási eljárásokat. Például számolási eljárást tanulnak a gyerekek a tízes átlépés módszer további fokozatainak végigjárásakor, a pótlások és bontások segítségével. A 100-as számkörben való biztos tájékozódásra, összeadásra, kivonásra épül a szorzás.

Az új műveletekhez (szorzás és osztás) rengeteg új számolási eljárást ismernek meg a tanulók, például, hogy egy szám 7-szerese az 5-szörösének és a 2-szeresének az összege. A szorzótáblák értés nélküli, külső és belső kapcsolataik ismerete nélküli magolása egyáltalán nem ajánlott! A szorzótáblák tanulási sorrendje egyrészt a könnyen megjegyezhetőséghez igazodjon, másrészt az egymással kapcsolatban álló szorzótáblák egymásutániságára épüljön! Az értő tanulás fontossága és a megértéshez szükséges idő miatt került az egyes szorzótáblák (6, 7, 8) készségszintű tudása 3. osztályra.

A 3–4. osztály feladata, hogy a tanulók az analógiás gondolkodás segítségével az 1–2. osztályban megtanult számolási eljárásokat kiterjesszék a nagyobb számokkal végzett műveletekre, illetve, hogy a 100-as számkörben végzett számolásokat készségszintre emeljék, és a velük analóg esetekben is könnyedén elvégezzék a számrendszeres gondolkodás segítségével. Például 67–23, 670–230; 3·4, 30·400.

Csoportosításokon alapuló számolási eljárások gyakorolhatók például szorobánnal.

## Fejben számolás

A fejben számolás a műveletek és számolási eljárások megértése után a tanuló számára legpraktikusabb módszerek kiválasztását, azok begyakorlását, bevésését, valamint az emlékezet fejlesztését célozza. A fejben számolás során memorizálják a gyerekek a bontásokat, a szorzótáblákat. Sokszori, rövid, lehetőség szerint mozgással kísért ismétléssel segítjük a műveletek automatizálódását. Ezek az ismétlések azt jelentik, hogy olyan órákon is gyakoroljuk a számolást, amikor nem az a fő téma. Remek játékokat lehet találni, amelyek az alapszámolásokat gyakoroltatják úgy, hogy a tanuló észre se veszi, hogy közben mennyit számol. Az ilyen játékban megjelenő gyakorlás sokkal hatékonyabb és motiválóbb, mint ha csupán műveletsorokat kell megoldaniuk a tanulóknak.

Amíg nem történik meg a bevésődés, addig megengedhető az eszközhasználat, ebben az esetben a gyermek ujja is jelentheti az eszközt. Ha már korongokat, pálcikákat nincsen lehetőség pakolgatni, akkor a gyermek az ujjai segítségével tudja megjeleníteni a számokat, amíg ki nem alakul róluk a belső képe. Az absztrakciós folyamatot siettetni nem lehet, segítséget nyújtani, kísérni viszont igen. A tanuló ujjak használatával történő számolása jelzés a tanítónak, így lehetősége van megkeresni az elakadás okát (például számfogalom kialakulatlansága, számolási eljárásban való bizonytalanság), és megfelelő fejlesztéssel tud segíteni az előrelépésben.

## Írásbeli műveletek

Reálisan kell látnunk az írásbeli és szóbeli számolás szerepét a mindennapi életben. A szóbeli számolás, becslés mindig is az életünk részét fogja képezni, míg az írásbeli számolás egyre inkább háttérbe szorul, szerepét a különböző digitális eszközök veszik át. Azonban az írásbeli műveletekre nemcsak a számolás segítése és gyorsítása miatt van szükségünk, hanem az általa fejlesztett egyéb készségek miatt is. Ezért az algoritmusok megtanítása, gyakoroltatása jó, ha a tanítási gyakorlat részét képezi, viszont nem szabad, hogy túl sok időt vegyen el az egyéb fontos területektől, amelyek nélkül valóban megakadhat a matematikai gondolkodás fejlődése.

Az írásbeli műveletek minden esetben a helyi értékes gondolkodáson alapulnak. A műveletek elvégzési módját tárgyi tevékenységekkel magyarázzuk. A műveletek algoritmusát tojástartókkal, rajzos csoportosításokkal, pénzekkel (például: tökéletes pénztárgép) szemléltethetjük. A gyerekek a későbbiekben differenciáltan, igény szerint használhatják az eszközöket a műveletvégzéshez.

### Írásbeli összeadás és kivonás

Fontos, hogy az írásbeli összeadás mindig kapcsolódjon a helyiérték-táblázathoz, a gyerekek értsék, hogy miért végezhetik számjegyenként a műveletet, mit jelent a továbbvitel. Ezért nagyon jó gyakorlat, ha a ténylegesen is megjelenített számokról (apró tárgyak, rajzos csoportosítások, pénzek) leltárt írnak, a számoknak megfelelő dolgokat „összeöntik", az „összeöntésről" is leltárt készítenek, majd elvégzik a szükséges beváltásokat. Adjunk a gyerekeknek olyan összeadásokat is, amelyekben több számot adunk össze, és az is előfordul, hogy nem egyet kell átvinni a következő helyi értékre. Az írásbeli kivonás algoritmusa kétféle lehet. Jobban adódik a tevékenységből az a módszer, amikor például a tízes átlépés esetén a kisebbítendőben váltunk fel egy tízest egyesekre, és így már el tudjuk végezni a kivonást. Az értelmezési időszakban ezt a módszert használjuk, azonban nehézséget okoz, ha a kisebbítendőben nullák állnak. Elkerülhető ez a probléma, ha tízes átlépéskor a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz ugyanannyit hozzáadunk: a kisebbítendőhöz 10 egyest, a kivonandóhoz pedig 1 tízest. Ez jelenti azt, hogy „alulra hozzáadunk egyet" a tízes helyi értéken álló számjegyhez. A kivonást elvégezhetjük pótlással és elvétellel is. A pótlásos szöveg általában közelebb áll a gyerekekhez, különösen, ha már jól megértették, hogy mit csinálnak, és már az automatizáláson van a hangsúly. Érdemes ezért a pótlásos módszert jól begyakoroltatni.

Ne tanítsuk már 2. osztályban az írásbeli összeadás és kivonás algoritmusát kétjegyű számoknál, ugyanis az a számfogalom helyes épülésének és az értő fejszámolásnak vet gátat. 3. osztályban is csak második félévben ajánlott az írásbeli összeadás, kivonás tanítása, amikor a tanulóknak már helyes képük alakult ki a háromjegyű számokról, és fejben is tudnak velük számolni.

Az írásbeli összeadás és kivonás ellenőrzése az ellentett művelettel sokszor felesleges. Ugyanis gyakori, hogy a tanulók nem számolják végig az ellenőrzést (csak „másolnak"), vagy ugyanazt a hibát vétik ellenőrzéskor is. Ezért hasznosabb lehet, ha két egymástól független műveletet végeznek el, de azokat odafigyelve. Ellenőrzésként pedig az észszerű becslésükkel vetik össze a kapott eredményt.

## Írásbeli szorzás és osztás

Az írásbeli és szóbeli szorzás során is fontos, hogy a gyerekek mindig a helyi értékek szerint gondolkodjanak, értsék a balra, illetve jobbra tolódást. Ennek értelmezését segíti például egy adott összeg pénzekkel való kirakása, a kirakásról leltárkészítés, majd minden pénzérmének a 10-szeresére történő cserélése, végül az újbóli leltározás. A kétjegyűvel való szorzásnál bontsuk a szorzót tízesekre és egyesekre! A tízes helyi értéken álló számjeggyel való szorzáskor mindig tudatosítania kell a tanulónak magában, hogy valójában kerek tízessel szoroz, így érthető, hogy miért tolódnak el a helyi értékek. A nulla kiírása ebben az életkorban még fontos, annak elhagyását nem kell siettetni. A gyerekek számára az is az érthetőséget és értelmezhetőséget segíti, ha az eredeti szám helyi értékei alá írjuk a részletszorzatok azonos helyi értékeit is.

Az írásbeli osztás magyarázatakor játsszuk le a műveletet színes rudakkal, pénzekkel részekre osztásként, folyamatosan értelmezve a lépéseket a helyiérték-táblázat alapján! Például 8 százasból osszunk ugyanannyit 3 kupacba úgy, hogy a lehető legtöbb százast kiosszuk! Minden kupacba jutott 2 százas, ezzel kiosztottunk 3·2=6 százast, de maradt 8–6=2 százas, amit már nem tudtunk egyenlően szétosztani. Ezt fel kell váltani a következő helyi értékre, hogy az osztást folytatni tudjuk. Így tudják a gyerekek, hogy a hányadosba kerülő számjegy melyik helyi értéken lesz, és értik a visszaszorzás–kivonás okát. Az algoritmus tudatosítása érdekében a hosszabb formában jegyezzük le az egyes lépéseket külön-külön sorban: a visszaszorzás eredményét (mennyit osztottunk már szét) és a kiinduló helyzetből kivonással meghatározott maradékot (mennyit kell még szétosztani). Alsó tagozaton az egyjegyűvel való osztás során a maradék meghatározását sokszor fejben is el tudják végezni a gyerekek, ennek ellenére érteniük kell a visszaszorzás és kivonás lépéseket, mert 5. osztályban a kétjegyűvel való osztásnál már nem fognak tudni fejben számolni. Fontos, hogy majd építhessenek az alsó tagozatos ismeretekre, akkor amikor már mindenképpen szükség van a hosszabb lejegyzésre: leírjuk a visszaszorzás eredményét, és csak ezután határozzuk meg kivonással a maradékot. Ezt a fajta segítséget nem szabad elvenni, mert nem elvárható még felső tagozaton sem, hogy a tanulók fejben elvégezzék a szükséges műveleteket. Az algoritmus lényegének megértéséhez, a pontos és gyors végrehajtásához pedig a hosszabb lejegyzés biztonságot jelent minden tanulónak. A kétjegyűvel való írásbeli osztás elvégzése alsó tagozaton nem követelmény, felső tagozaton tanítjuk meg.

## Törtrészek

Alsó tagozaton a törtrészeket kirakással, rajzzal ismerik meg a tanulók. Ez készíti elő és alapozza meg az 5–6. osztályban a törtszámok bevezetését, törtrészszámítást, százalékszámítást. 2. osztályban a részekre osztás gondos kimunkálása a törtek előkészítését szolgálja, és mennyiségek, számok törtrészét állítjuk elő (például fél, harmad, negyed). 3. osztályban az egységtörteket vizsgáljuk, hasonlítjuk össze, 4. osztályban az egységtörtek többszöröseivel foglalkozunk konkrét kirakásokon, rajzokon keresztül.

A lényeg a törtrészek minél többféle reprezentációban való felismerése, alkotása. Az egyenlő törtrészek kirakása például színes rudakkal, mozaiklapokkal a bővítés és egyszerűsítés előkészítését szolgálja azok kimondása nélkül.

A nevezőt betűvel írjuk, így is segítve a megértést, például *„3 negyed”.* Mivel a törtfogalom alakulása hosszabb folyamat, és nem zárul le 4. osztály végéig, ezért fontos lenne, hogy 5. osztályban hosszabb legyen az az időszak, amikor absztrakció nélkül, szemléltethető törtrészekkel dolgozunk.

## Negatív számok

A negatív számok a természetes számokhoz hasonlóan sokféle tartalommal épülnek. A *számláláshoz* kapcsolódik a számegyenes; a *halmazos szemlélethez* az adósságcédulák; a mennyiségekhez például a hőmérséklet, a tengerszinthez viszonyított magasságok, egy adott időponthoz való viszonyítás; a *sorszámhoz* például az épületek szintjeinek jelzése. Fontos, hogy a gyerekek sokféle megjelenési formáról szerezzenek tapasztalatokat, megértsék azokat a szituációkat, amelyekben negatív számok előfordulnak. A negatív számok adósságként való értelmezése során mindig konkrét kirakásokkal (játékpénzek, adósságcédulák) vagy ábrákkal, rajzolással dolgozzunk, és meg kell állapodnunk a szóhasználatban: adósság, készpénz, vagyon. Tudatosítani kell, hogy hogyan keletkezik az adósság: ha kölcsönt veszünk fel, akkor kapunk valamennyi készpénzt és ugyanannyi adósságcédulát; ha költünk a pénzből, az adósságcédulából több marad. Nagyon figyelni kell a szóhasználatra, mert például a hiányt, a mélységet nyelvileg is ki tudjuk fejezni, de ezek mellett a negatív szám már mást jelent. Például ha az adósságom 15 Ft, akkor a vagyonom –15 Ft, és nem az adósságom –15 Ft.

A negatív számok összehasonlítása, a változások követése a negatív szám fogalmának mélyítését szolgálja.

**Alkotás térben és síkon**

A tanulók sok információt (főként készen kapott kétdimenziósakat) szereznek vizuális úton, ugyanakkor vizuális (síkbeli és térbeli) alkotóképességük fejlesztésre szorul. Különösen fontos, hogy a tanítási gyakorlat a geometria területén se elsősorban tankönyvi feladatokra építsen, hanem a változatos tevékenykedtetés szolgálja az ismeretek alapját. A konstruálás során a gyerekek alakzatokat, mintákat, sorozatokat hoznak létre, és megfigyelik azok tulajdonságait. Kezdetben szabadon építhetnek, megismerve az eszközöket. Később másolnak különböző minták alapján változtatás nélkül, majd változtatással (pl. építés árnykép alapján, tangram játék). Végül építenek feltételek alapján. Fokozatosan növelhetjük a feltételek számát és az elvárt alkotások számát, míg eljutunk a feltételeknek megfelelő összes alkotás létrehozásához. Néha célszerű a feltételrendszert addig változtatni, amíg csak egy alkotás felel meg minden feltételnek, és ezzel rávilágíthatunk az alkotások tulajdonságaira. Például a mozaiklapokkal való kirakás lehetőséget ad arra, hogy elemezzük egy-egy síkidom tulajdonságait. „Melyik szög melyikkel »illik« össze?" „Melyek az egyenlő hosszúságú oldalak?" A gyerekek felfedezhetik, hogy ugyanazokból a mozaiklapokból milyen sokféle alakzat rakható ki. Ezeknek a területe ugyanakkora, mégis van, amelyik kisebbnek, másik nagyobbnak tűnik. Hasonló tevékenység végezhető a tangram játékkal is.

A síkbeli és térbeli alkotások során használjunk változatos eszközöket, például: gyurma, szívószál, különféle építőjátékok, papírhajtogatás, mozaiklapok, színes rudak, rajzeszközök, szöges tábla, pontrácsok. Az eszközök sokfélesége változatos tapasztalatokhoz juttatja a gyerekeket, amelyekkel nemcsak matematikai képességeik fejlődnek, hanem kreativitásuk, finommotorikájuk, esztétikai érzékük is.

Rendkívül hasznosak a különböző területeket érintő összetett feladatok, amik egyszerre fejlesztenek többféle képességet. Például: Alkossanak a gyerekek 4 rózsaszín rúdból különféle testeket! Hányfélét tudnak kirakni? Milyen kirakást tekinthetünk különbözőnek? Ezeknek milyen tulajdonságai vannak? (Tükrös? Konvex?) Ugyanezeket az építményeket hány fehér kis kockából lehetne megépíteni? Melyikeket lehet piros rudakkal megépíteni? Stb.

## Alakzatok geometriai tulajdonságai

Az alakzatokat kezdetben globálisan látják a gyerekek, fokozatosan fedezik fel az alakzatok tulajdonságait, azok összefüggéseit. Ezek az összefüggések azonban alsó tagozaton még nem rendszereződnek, ezért az alakzatokat ekkor még nem definiáljuk. Használjuk a tulajdonságok, alakzatok megnevezését, mert a tanulók ráismerés alapján képesek azokat megnevezni (egyenes, tükrös, kocka, téglatest, négyszög, négyzet, téglalap, kör, háromszög stb.), azonban ez nem egyenértékű azzal, amikor a tulajdonságait körüljárjuk, és felismerjük egy-egy alakzat jellemzőit. A tulajdonságokat alkotások során figyelik meg a gyerekek, majd az alakzatokat válogatják a felismert tulajdonságok alapján. Ezután következhet a tulajdonságok, az alakzatok elnevezése – ez azonban még nem definíció! Az általánostól a speciális felé haladva érzékelik a gyerekek a halmazok egymáshoz való viszonyát, és a tapasztalatokhoz is így juttatjuk őket. Például a téglalapok megfigyelt tulajdonságait vizsgáljuk a négyzeteken, és ebből fogalmazódik meg, hogy a négyzet egy különleges téglalap. A tulajdonságok megfigyelésekor többféle érzékszervet vegyünk igénybe! A látáson kívül a tapintás nagyon fontos a testek, síkidom modellek vizsgálatakor (például párkeresés tapintás alapján). A hallás is alkalmazható bizonyos esetekben, például „Milyen hangot ad, ha elgurítom? Gördül, döccen? Mikor áll meg?” stb.

## Transzformációk

A transzformációkkal a gyerekek először a különböző mintázatokban, sorozatokban megjelenő szabályosságok, változások megfigyelése során találkoznak. Emberek, tárgyak, dolgok, alakzatok tulajdonságainak változását, változatlanságát is megfigyelik térben és síkban. A megfigyelés játékos formái közül fontos megemlíteni a „Mi változott?” és a „Kakukktojás” játékokat. A figyelmet különböző tevékenységekkel irányítjuk rá az alapvető transzformációkra: a tanulók tükörképet, eltolt képet alkotnak mozgással, kirakással, rajzzal; tükörrel, hajtogatással, másolópapír segítségével. Sormintákat, síkmintákat folytatnak a felismert szabályosság szerint, majd maguk is készítenek ilyeneket. A sokféle alakzat és változatos eszközök alkalmazása mellett nagyon fontos a szimmetriákban rejlő szépség, harmónia bemutatása, annak felismerése a természetben, épített környezetben, művészi alkotásokban.

Megjelenik a kicsinyítés, nagyítás különböző méretű, de azonos alakú építőelemekkel, különböző méretű pontrácsokra történő építés, másolás során.

## Tájékozódás térben és síkon

Már iskolakezdéskor fontos az irányok ismerete, a térbeli viszonyok kifejezésére szolgáló szókincs értő használata. Az írás, olvasás elsajátításához is szükséges „bal-jobb" ismerete, a „fölé", „alá" jelentésének tudatosítása a vízszintes és a függőleges síkon. A térbeli tájékozódás a mozgásokon keresztül saját testhez viszonyítva kezdődik, ezt követi az adott viszonyítási ponthoz képest történő tájékozódás. A gyerekek bejárt útvonalat újra járnak visszafelé is, utasítás, egyszerű térkép alapján is. A robot irányítása adott útvonalon a tájékozódáson kívül az algoritmikus gondolkodást erősíti. A torpedó játékkal, sakktáblán adott hely azonosításával, négyzetrácson tájékozódással a koordináta-rendszerrel történő helymeghatározást készítjük elő.

## Összefüggések, kapcsolatok, szabályszerűségek felismerése

Sok más témakörhöz hasonlóan ez is olyan, amelyik viszonylag kevés órában szerepel önállóan, viszont szinte minden órán előkerül, foglalkozunk vele, áthatja a matematikatanulást. Kapcsolatokat, összefüggéseket fogalmazunk meg személyek, tárgyak, dolgok, időpontok, számok, testek, síkbeli formák között, tulajdonságaik alapján sorozatba rendezhetjük őket. Tudatosan törekedjünk arra, hogy változatos tartalommal mutassunk be sorozatokat, hétköznapi dolgok, geometriai alakzatok is alkossanak sorozatot, és akár a bennük felfedezhető számosság vizsgálata újabb sorozatokat eredményezhet. A gyerekek összefüggéseket keresnek a sorozatok tagjai között, adott vagy felismert szabály alapján tudják folytatni a megkezdett sorozatot. A szabályjátékok ne legyenek öncélúak, ugyanis könnyű megadni akármilyen szabályt, de lássuk, hogy ezt sokszor nehéz kitalálni, ha valaki nem ismeri! A szabályjátékok vagy hétköznapi szabályszerűségekhez, periodikusan változó dolgokhoz kötődjenek, vagy különböző matematikai fogalmak, ismeretek megvilágítását szolgálják (például az összeadógép)!

## Adatok megfigyelése

1. osztályban ez a témakör szorosan kapcsolódik a szám és valóság témaköréhez, hiszen a tanulók a számok nagyságáról a tényleges számlálás során szereznek tapasztalatot. Ezeket a számlálásokat érdemes okosan rögzíteni, így a tanulók megtanulják az adatgyűjtés alapjait.

A későbbiek során adatokat gyűjthetünk különböző dolgokról (ablak előtt elhaladó autók színe, száma, fajtája; osztály kedvenc italainak vizsgálata, figyelembe véve a nemeket is stb.), mérések eredményéről, véletlentől függő események kimeneteléről. Az adatokat különféleképpen rögzítjük, ábrázoljuk, majd a rögzített adatokat megvizsgáljuk, köztük összefüggéseket keresünk, az adatok alapján jellemezzük a vizsgált dolgokat.

**Valószínűségi gondolkodás**

A valószínűségi gondolkodás fejlesztése manapság gyakorlati szempontból egyre jelentősebb, mondhatni elengedhetetlen. Ezekben a témakörökben a tanulók korántsem egyszerű gondolatokról szereznek igen fontos tapasztalatokat, melyeket a későbbi évfolyamokon hasznosítani tudnak. Ezenkívül a valószínűségi játékok, kísérletek során a gyerekek számos készsége, képessége – többek közt a becslési és számolási készsége is – fejlődik.

Valószínűségi kísérletnél, feladatoknál az „esemény” szó helyett ne használjuk az „állítás” szót, mert az állítás csak igaz vagy hamis lehet, ezzel szemben az esemény lehet „biztos”, „lehetetlen” vagy „lehetséges, de nem biztos”. A gyerekek gond nélkül megszokják az esemény szót anélkül, hogy definiálnánk.

A kimenetelek vizsgálatakor a becslés szó helyett a tippelést érdemes használni.

A gyerekek igen gyakran drukkolnak egy számukra kedves esemény bekövetkezésének függetlenül attól, hogy ennek az eseménynek a bekövetkezése menynyire valószínű. Ennek a játékos lelkesedésnek teret kell engedni, ugyanakkor már 2. osztálytól fontos, hogy valószínűségi játékok, kísérletek során megfigyeljünk gyakoriságokat, és magyarázatokat keressünk rájuk. Emellett a tanulók tippelhetnek bármilyen eseményre (hamar észreveszik, hogy a lehetetlen eseményre nem érdemes tippelni).

A valószínűséggel kapcsolatos feladatokra nem adunk jegyet, de ez nem azt jelenti, hogy ettől a valószínűségi játékok, kísérletek során szerzett tapasztalatok, megfigyelések ne lennének fontosak. Az értékelés, visszajelzés a tanulóknak fontos ahhoz, hogy valószínűségi gondolkodásuk fejlődjön. Tehát a jó tippelésekért is lehet jutalmat kapni, de ez nem azonos a feladatmegoldás értékelésével.

## *5.2. 5–8. évfolyam*

### 5–6. évfolyam

***Halmazok*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 5., és más témaköröknél is legyen jelen

Fontos szerepet kap az eszközhasználat, a konkrét példákon való bemutatás, a megtapasztalás, például a csoport tagjai közül bizonyos tulajdonságok szerint történő osztályozás. Tevékenységgel is történjen adott szempont szerint konkrét halmaz elemeiből való válogatás, részhalmazképzés. Két halmaz közös része, egyesítése konkrét példákon keresztül jelenjen meg. Győződjünk meg arról, hogy a tanulók értik a fogalmakat, de ne ragaszkodjunk a pontos definíciók megadásához, számonkéréséhez. A példák ne csak matematikai témájúak legyenek, igazodjanak a korosztály fogalomvilágához, nyelvi eszközkészletéhez.

***Matematikai logika, kombinatorika*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6., és más témaköröknél is legyen jelen

A logika témakörben hangsúlyosak a játékos elemek. A szójátékok, logikai állítások maradjanak meg a játék, a konkrét szituációk szintjén, definíció megfogalmazását ennél a témakörnél sem ajánljuk.

A kombinatorikában az eszközökkel – konkrét tárgyakkal, készletek elemeivel, geometriai alkotásokkal – végzett tevékenységen, adott feltételeknek megfelelő kirakások összeállításán van a hangsúly. Alkalmazzunk ágrajzot, táblázatot, egyéb rendszerező eljárásokat, de az adott helyzetre vonatkozó matematikai szakkifejezést és a lehetőségek összeszámlálásáról szóló képletet még ne használjuk.

***Természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

A számrendszerek előtérbe helyezésével fejlődik a helyi értékes gondolkodás. A tanulók életkori sajátosságaiból adódik a játékosság. Szívesen vesznek részt vásárlást modellező tevékenységekben, leltárkészítésben, pénzváltásban. A boltos játékkal közelebb hozhatjuk a különböző alapú számrendszereket és a köztük való átváltást. A javasolt tevékenységek között felsorolt különféle játékok a későbbi absztrakciót készítik elő.

A „felcsavart számegyenes” annak belátását segíti, hogy elegendő az osztási maradékokkal való számolás bizonyos oszthatósági feladatok megoldásában.

A téma kiválóan alkalmas a páros és csoportmunkára. A számelmélet témakör lehetőséget nyújt matematikatörténeti érdekességek bemutatására tanulói kiselőadás vagy projekt keretében.

***Alapműveletek természetes számokkal*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 5.

Az alapműveletek tanítása a számhalmazok bővítésével párhuzamosan történik. Fontos, hogy a fejben számolási eljárásokat ennél a korosztálynál is gyakoroljuk legfeljebb 100 000-es számkörben, analógiák alkalmazásával.

A műveletek mindig gyakorlati helyzethez kötődnek, így értelmet nyer a várt eredmény becslése és a kapott mennyiség észszerű, a problémának megfelelő kerekítése. A tanulók megfigyelik és alkalmazzák az összeg, különbség, szorzat, hányados változásait, ismerik a műveleti sorrendet és a zárójel szerepét, de nem kérjük számon tőlük az ismereteket szabály formájában. A természetes számok halmazán megfigyelt műveleti tulajdonságok spirálisan visszatérnek a további számhalmazok műveleteinél.

A kétjegyű osztóval való írásbeli osztás algoritmusa nem szerepel az alsó tagozatos kerettantervben, az ötödik osztályban kell megtanítani. Többjegyű osztóval való írásbeli osztást ne várjunk el, a hangsúly az algoritmus megértésén legyen. Több műveletből álló műveletsort konkrét szöveges feladathoz kapcsoljunk, a céltalanul végzett, mindennapi élettől távoli feladatok kitűzését kerüljük el. Javasoljuk számológép alkalmazását nagy számokkal való műveletek elvégzéséhez és írásbeli műveletek ellenőrzéséhez.

***Egész számok; alapműveletek egész számokkal*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

A negatív szám fogalmának bevezetése feltétlenül valamelyik ismertetett modell – játékpénz, adósságcédula, hőmérő, számegyenes – segítségével, sok-sok játékon keresztül történjen. Szerezzünk tapasztalatot arról, hogy a tanulókat melyik modell használata segíti legjobban a negatív számok megismerésében és az ezekkel való műveletvégzésben. Ne siettessük a modelltől való elszakadást.

Az egész számok összeadásának és kivonásának tanítását az 5. évfolyamra, a szorzást és az osztást a 6. évfolyamra javasoljuk.

A természetes számokkal végzett műveleteknél megtapasztalt műveleti tulajdonságokat ezen a számhalmazon is megfigyeljük és alkalmazzuk. A mindennapi élethez kötődő szöveges feladat megoldása során jussunk el a több műveletből álló műveletsor felírásához és kiszámolásához.

***Közönséges törtek, tizedes törtek, racionális számok*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 5.

Ebben a témakörben is a szemléltetésen, a játékon, a modellek – például tortamodell, téglalapmodell, színesrúd-modell, tányérmodell – használatán van a hangsúly. Törekedjünk a törtfogalom fokozatos felépítésére, engedjük a modell használatát a témakörben való jártasság kialakulásáig. Az absztrakt törtfogalom kialakítása után szemléltessük és hasonlítsuk össze a törteket párhuzamos számegyeneseken. A törtekkel kapcsolatos feladatok a hétköznapi életben előforduló, a tanulók által megtapasztalható helyzetekhez kötődjenek.

Új fogalom a tizedes tört, melynek az egész számok tízes számrendszerbeli írásmódjához és a közönséges törtek többféle alakjához is kapcsolódnia kell. A racionális szám fogalmát a témakör előkészíti, de a definíció megadása még nem történik meg.

***Alapműveletek közönséges törtekkel*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

A közönséges törtekkel való műveletek értelmezéséhez fontos a törtfogalom kialakításánál használt modell további alkalmazása gyakorlati helyzetek, tárgyi tevékenységek során.

5. évfolyamra javasoljuk az egyenlő és különböző nevezőjű törtek összeadását, kivonását, a tört szorzását és osztását természetes számmal. Törtnek törttel való szorzását és osztását a 6. évfolyamon tanítsuk.

Az egész számokkal végzett műveleteknél megtapasztalt műveleti tulajdonságokat ezen a számhalmazon is megfigyeljük és alkalmazzuk. A mindennapi élethez kötődő szöveges feladat megoldása során jussunk el a több műveletből álló műveletsor felírásához és kiszámolásához.

### ***Alapműveletek tizedes törtekkel*** (14 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

Ebben a témakörben is a két számhalmaz (egész számok és közönséges törtek) műveleteivel való kapcsolatot kell szem előtt tartani. A feladatok konkrét helyzetekhez kötődő problémamegoldást tartalmazzanak.

5. évfolyamra javasoljuk a tizedes törtek összeadását és kivonását, természetes számmal való szorzását és osztását. Tizedes törtnek tizedes törttel való osztását a 6. évfolyamon tanítsuk.

A tizedes törttel való osztás megértését segítik a mértékegység-átváltáshoz kapcsolódó modellek és tevékenységek, használatuk elengedhetetlen. Tizedes törtek írásbeli osztását legfeljebb két tizedes jegyet tartalmazó számmal gyakorlati feladatok megoldása során végezzünk.

Az egész számokkal végzett műveleteknél megtapasztalt műveleti tulajdonságokat ezen a számhalmazon is megfigyeljük és alkalmazzuk. A mindennapi élethez kötődő szöveges feladat megoldása során jussunk el a több műveletből álló műveletsor felírásához és kiszámolásához.

### ***Arányosság, százalékszámítás*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

Több téma kapcsolódik ehhez a területhez: Mérés és mértékegységek; Természetes számok, számelméleti ismeretek; Műveletek különböző számhalmazokon. A kapcsolódási pontok lehetőséget adnak a részterületek témáinak összefűzésére és egy áttekintő ismétlésre. A témakör központja, kiinduló alapja az egyenes arányosság. Egyenesen arányos mennyiségpárokat keresünk a hétköznapi életből, vásárolunk, mérünk különböző alkalmi (például a ceruza hossza), objektív (például színes rúd) és szabványmértékegységekkel. Megfigyeljük a mérőszám és a mértékegység viszonyát, felhívjuk a figyelmet a helyi értékes gondolkodás szerepére a szabványmértékegységek átváltásánál.

A százalékszámítás témáját törtrészszámolási feladatokkal készítjük elő. Ebben a tanulási szakaszban a témához tartozó fogalmak definiálása és az ide tartozó képletek használata nem követelmény. Törekedjünk a „századrész" és a „százalék" elnevezések párhuzamos használatára gyakorlati helyzetekben, például fogyasztási cikkek címkéin, reklámokban, társadalomismereti és természetismereti tanulmányokban előforduló százalékos adatok értelmezésénél.

A téma gyakorlati feladatok megoldására, egyéni és csoportban végezhető projektmunkára is lehetőséget ad.

***Egyszerű szöveges feladatok*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6., és más témaköröknél is legyen jelen

A szöveges feladatokban csak a korosztálynak megfelelő matematikai kifejezések, problémák forduljanak elő. Ezek között kapjanak kiemelt szerepet a háztartás pénzügyeivel kapcsolatos feladatok. Törekedjünk ebben a témakörben is a játékosságra, a tanulók érdeklődésének fenntartására, kreativitásuk fejlesztésére például a „Gondoltam egy számot" játék megismertetésével, szabályának felfedeztetésével.

A feladatok megoldása során változatos módszereket alkalmazzunk, rajzoljunk, szemléltessünk, következtessünk, de kerüljük az egyenlet felírását és megoldását.

***A függvény fogalmának előkészítése*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

A témakör feldolgozása során tartsuk szem előtt, hogy a fogalom előkészítése a célunk, és nem a pontos definiálás. Két terület kapcsolódik össze a témában: a számpárok alapján való tájékozódás gyakorlati helyzetekben és a halmazelemek közti megfeleltetés létrehozása. Mindkét terület tanítása során fontos a játékosságon és a tevékenységen alapuló ismeretszerzés.

A számpárok alapján való tájékozódás ne korlátozódjék a derékszögű koordináta-rendszer pontjainak jellemzésére. Adjunk magunk is példát (mozijegy, színházjegy adatai, sakktábla cellái, torpedó), de engedjünk lehetőséget a tanulóknak is a témához kapcsolódó példák és játékok gyűjtésére, bemutatására.

A megfeleltetésekről szóló feladatokban ne csak a matematika részterületeiről vegyük a példákat. Támaszkodjunk az 1–4. évfolyamon tapasztaltakra mind a szabályok felismerésében, mind a saját szabályok megalkotásában és azok felismertetésében.

Kapcsoljuk össze a két részterületet az egyenes arányosságnál feldolgozott gyakorlati feladatokkal, és az adatokból készítsünk grafikont. Figyeltessük meg a grafikon tulajdonságait, és a megfigyelést alkalmazzuk több grafikon közül az egyenes arányosságot leíró kapcsolat kiválasztására.

***Sorozatok*** (8 óra)

Javasolt évfolyam: 6.

Nem a szigorúan matematikai értelemben vett sorozatok megismertetésén van a hangsúly, hanem a környezetünkben előforduló számok, sorminták, díszítő elemek, népi motívumok, ritmusok, ismétlődések, szabályszerűségek megfigyelésén. Itt is kapcsolódjunk az 1–4. évfolyamon szerzett ismeretekhez. Szánjunk időt saját vagy csoportos tevékenységre. Engedjük a kreatív ötletek megvalósítását és bemutatását. A téma lehetőséget ad az ének-zene, a vizuális kultúra és a matematika tantárgyakkal való közös projekt kitűzésére.

A Sorozatok téma önálló fejezetként csak a középiskolában jelenik meg legközelebb. A 7–8. évfolyamon más témakörökhöz (például szöveges feladatok megoldása, négyzetszámok tulajdonságai, matematikai játékok) kapcsolódva törekedjünk a megszerzett ismeretek felidézésére, alkalmazására, bővítésére.

***Mérés és mértékegységek*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6., és más témaköröknél is legyen jelen

A témakör teljes feldolgozása a tevékenykedtetésen, a megtapasztaláson és a konkrét helyzetekből való tanulságok leszűrésén alapuljon. Mérjünk mindent, ami körülvesz bennünket: az ajtó nyitásával létrehozott szögtartományt, edények űrtartalmát, szabálytalan alakú tárgyak térfogatát mérőhengerbe való bemerítéssel, az osztályterem, az iskolaépület, a közeli játszótér adatait. Támaszkodjunk az 1–4. évfolyamon szerzett tapasztalatokra. Törekedjünk arra, hogy a megszerzett tudás élményhez kötődjön, ne szóbeli ismeretközléshez (például mutassunk 1 dm élű kockát, amit megtöltünk 1 cm élű kockákkal). Az alkalmi és a szabványmértékegységekkel végzett mérések során fejlesztjük a becsléshez, a mérési tevékenység megtervezéséhez és a mérőeszköz használatához szükséges képességeket. A mérőszám és a mértékegység viszonyának megfigyelésével az egyenes és a fordított arányosság témakörét is előkészítjük.

***Síkbeli alakzatok*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

A téma valósághoz közeli ugyan (például az osztályterem, az iskola, az iskola környékének megfigyelése), de törekedjünk a tapasztalatok geometriai szempontból lényeges elemeinek kiválasztására, a hozzájuk társuló szakkifejezések használatára. Megnevezzük ugyan a térelemeket, de a pontos definíciót nem fogalmazzuk meg. A cél, hogy a tanulók ismerkedjenek a pont és a sík absztrakciójával, meg tudják különböztetni az egyenest, a szakaszt és a félegyenest.

A fejlesztési feladatokban megfogalmazott ismeretekhez sok tevékenységgel (készletből adott szempontoknak megfelelő elemek válogatása), szemléltetőeszköz-készítéssel (szívószálból, hurkapálcából, papírból háromszög) és eszközhasználattal (síktükör alkalmazása, papírhajtogatás) jussunk el. Csoportmunkát, páros munkát, játékot (tangram, pentomino) is alkalmazhatunk a tevékenységek során.

***Transzformációk, szerkesztések*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 6.

A témakör két fontos részterületet kapcsol össze. Anélkül, hogy a transzformáció szót kiejtenénk, valós mozgatásokból választjuk ki a számunkra fontos tengelyes tükrözést. Másolópapírral, tükör, hajtogatás vagy digitális eszköz segítségével tapasztaljuk meg és gyűjtjük össze a legfontosabb tulajdonságokat. A megfigyelt tulajdonságok segítenek a tengelyes tükrözésen alapuló szerkesztési feladatok megoldási lépéseinek tudatosításában, a témakör két részterületének összekapcsolásában. A szerkesztések alkalmat teremtenek a hagyományos (körző, vonalzó) és a digitális eszközök párhuzamos használatára. A szimmetria témakörében lehetőség van a vizuális kultúra, a technika és tervezés és a természettudomány tantárgyakkal közös projekt készítésére.

***Térgeometria*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

Fontos, hogy hangsúlyt kapjon a közvetlen környezetből (osztályterem, iskola, iskola környéke) való tapasztalatszerzés. A feladatok konkrét helyzethez, konkrét gyakorlati probléma megoldásához kötődjenek. Egyéni vagy páros munkában végezzük a megfigyelt tulajdonságok gyűjtését, a készletből adott szempont szerinti válogatást, a különböző elemekből való építést. Ne maradjon el a reflektálás, az irányított összegzés sem. Az építőelemek legyenek változatosak, alkalmazzunk használati tárgyakat, dobozokat, színes rudakat. Szerezzünk tapasztalatot a különféle építmények nézeti rajzának, hálójának felismerésében és elkészítésében is. Hívjuk fel a figyelmet a tanulók kisgyermekkori építőjátékai és a matematikaóra szemléltetőeszközei közötti kapcsolatra.

***Leíró statisztika*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6., és más témaköröknél is legyen jelen

A digitális világ számos helyen megkerülhetetlenné teszi a statisztikai alapok ismeretét. Az információk feldolgozására, megértésére már ebben az életkorban is meg kell kezdeni a felkészülést. A közvetlen környezet számos lehetőséget kínál gyűjtőmunkára (például vásárlási szokások felmérése az iskolai büfében), a gyűjtött adatok bemutatására, megbeszélésére, értelmezésére, szemléltetésére. A tapasztalati úton szerzett tudást alkalmazhatjuk a valószínűségi kísérletek adatainak szakszerű rögzítésére, feldolgozására.

Javasoljuk közös projekt készítését a természettudomány, a technika és tervezés, az erkölcs és etika és a vizuális kultúra tantárgyakkal.

***Valószínűség-számítás*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 5. és 6.

Ebben az életkorban legyen a játék és a valószínűségi kísérlet a középpontban. Az ismert és az új játékokban is érdemes felhívni a figyelmet az intuitív esélylatolgatás alapján stratégia megalkotására és kipróbálására. A játékokhoz használt eszközeink lehetnek dobótestek, pénzérmék, kártyák, zsákba helyezett színes golyók. A játék során törekedjünk a „biztos", a „lehetséges, de nem biztos" és a „lehetetlen" események azonosítására, a megfogalmazások helyes használatára. A kísérletek elvégzését mindig előzze meg a lehetséges kimenetelek átgondolása és a tippelés, hogy melyik esemény bekövetkezésének esélye a nagyobb. A statisztikában megtanult módszereket alkalmazzuk a kísérletek adatainak rögzítéséhez.

Néhány játék részletes leírása a kerettanterv javasolt tevékenységei között olvasható.

## 7–8. évfolyam

***Halmazok, számhalmazok*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 7., és más témaköröknél is legyen jelen

Ebben az életkorban a matematika más területeiről már sok olyan ismerettel rendelkeznek a tanulók, amelynek a megerősítését segítheti a halmazelmélet felőli megközelítés. A különféle konkrét válogatások (például négyszögek közül) szempontjainak felfedezése, az adott tulajdonság alapján történő válogatás, az adott halmaz különböző részhalmazainak képzése (például deltoidok közül a rombusz kiválasztása) segítik a fogalmak elmélyítését.

Adjunk olyan feladatokat, amelyekben a tanulóknak konkrét elemeket két-három tulajdonság szerint kell válogatniuk, és meg kell fogalmazniuk a keletkezett diszjunkt halmazok jellemzőit (tartalmazza a mindegyik tulajdonsággal rendelkező elemeket, a pontosan egy tulajdonsággal, a pontosan két tulajdonsággal és az egyetlen tulajdonsággal sem rendelkező elemeket). Lássanak a tanulók logikai szita alkalmazását igénylő egyszerű feladatokat is.

Új művelet a halmaz kiegészítő halmaza (komplementere). Ennek megismertetésével együtt elevenítsük fel a véges halmazok metszetéről és uniójáról tanultakat ábrázolás segítségével, konkrét esetekben, gyakorlati helyzetekben. Törekedjünk a műveletek definíciójának pontos megadására. Győződjünk meg arról, hogy a tanulók értik a hallott megfogalmazásokat, de ne kérjük tőlük számon.

A témakör lehetőséget teremt a logikai műveletekkel való párhuzam megmutatására konkrét helyzetekben.

***Matematikai logika, kombinatorika, gráfok*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 7. és 8., és más témaköröknél is legyen jelen

A logika témakörét logikai játékokon és rejtvényeken keresztül közelítsük meg. A téma alkalmat ad arra, hogy a tanulók már megszerzett ismereteit igaz és hamis állításokon keresztül átismételjük. A megfogalmazásokban törekedjünk a szakkifejezések használatára.

A kombinatorika feladatok megoldásában kis elemszámú halmaz esetén tekintsük át az összes lehetséges esetet valamely már megismert rendszerezési séma (például táblázat, ágrajz, szisztematikus felsorolás) alkalmazásával. A sémát fokozatosan elhagyva a konkrét tevékenységtől jussunk el az absztrakcióig. Ne feladat-kategóriák mentén dolgozzuk fel a témát, hanem mutassunk rá a látott példák alapján az analógiák alkalmazásának lehetőségére. Fedeztessük fel a szorzási szabályt, de ne várjuk el a szokásos képleteket. Adjunk feladatokat konkrét helyzethez kötött sorba rendezési problémára (akár ismétlődő elemekkel is, egyenes vagy kör mentén), lehetséges útvonalak számának meghatározására, ábrák színezési lehetőségeinek összeszámlálására, elemek kiválasztására sorrenddel vagy anélkül.

A kombinatorikában alkalmazott ágrajz és más rajzos szemléltetési mód lehetőséget teremtenek a gráfokkal való ismerkedésre. A kézfogások, körmérkőzések, családfák ábráival bevezethetjük a legfontosabb elnevezéseket.

***Számelméleti ismeretek, hatvány, négyzetgyök*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 7. és 8.

A hatványozás témaköre a középiskolai évfolyamokra került. Ebben az életkorban a hatványozást igénylő feladatok megoldásához a pozitív egész számok pozitív egész kitevőjű hatványának ismerete elegendő, és nem szükséges az azonosságok alkalmazása sem.

Mutassuk meg a prímtényezős felbontás algoritmusát, majd a kapott szorzatnál alkalmazzuk a tanult hatványalakot. Leegyszerűsödik a hatványalakban felírt prímtényezős felbontás segítségével a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös számolása. Alkalmazásuk lehetőséget ad a törtekkel való műveletek átismétléséhez.

A négyzetgyök fogalmát csak előkészítjük a négyzetszámok négyzetgyökének kiszámolásával. Javasoljuk a témát a Pitagorasz-tételhez kötni.

***Arányosság, százalékszámítás*** (22 óra)

Javasolt évfolyam: 7.

Bővültek a tanulók egyenes arányossághoz köthető ismeretei mind a matematika, mind a többi tantárgy területén. Például a fizikában megismert egyenletes mozgás mennyiségei között fennálló kapcsolatokat a matematika oldaláról is megvizsgálhatjuk. Új témaként jelenik meg a fordított arányosság, amit ugyancsak megfigyelhetünk az egyenletes mozgás mennyiségeinél, de a mérőszám és a mértékegység viszonyában, vagy az azonos területű, különböző téglalapok oldalhosszainak összehasonlításában is.

A százalékszámítási feladatokban hangsúlyozzuk az arányossággal való kapcsolatot. Használjuk a témában szereplő mennyiségek nevét, de azok kiszámítási módját az arányosságnál tanult szabályszerűségek alkalmazásával mutassuk meg. A kitűzött feladatok valóságos helyzetekhez (áremelés, leárazás, egyszerű kamat, konkrét banki ajánlatok, keverési problémák, levegő összetétele, páratartalom) kötődjenek.

A téma lehetőséget ad a földrajz, a fizika, a kémia, a technika és tervezés és a társadalomismeret tantárgyakkal közös projekt készítésére. A banki szolgáltatások matematikájáról és a pénzvilág szakterületeiről külső előadó bevonásával érdemes tájékoztatást tartani.

***Szöveges feladatok előkészítése*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 7.

A témakör célja a gyakorlati problémák matematikai tartalmának formalizálása, az egyenletek felírása és az egyszerűbb átalakítások, köztük a kiemelés elsajátítása, eltérve az eddigi gyakorlattól, amelyben az algebrai kifejezések átalakítása önálló fejezetként, az alkalmazási területtől független egységet alkotott.

Szánjunk időt adott problémához megfelelő, betűt tartalmazó műveletsor megalkotására, adott, ismeretlent tartalmazó műveletsorhoz szöveges feladat írására. A téma nehézsége indokolja a játékos tevékenységek („dominó", „triminó", „Gondoltam egy számot") további alkalmazását.

Az egyenletek megoldásához feltétlenül használjunk modellt: a lebontogatáshoz a visszafelé gondolkodás ábráját, a mérlegelvhez a kétkarú mérleget.

***Szöveges feladatok*** (22 óra)

Javasolt évfolyam: 7. és 8., és más témaköröknél is legyen jelen

A korábbi gyakorlatban látott tematizálás (számjegyes feladatok, munkavégzéses feladatok…) helyett a változatos megoldási stratégiák és módszerek tehetik érdekesebbé és eredményesebbé a témakör feldolgozását.

A hagyományos feladattípusok mellett törekedjünk nyitott feladatok, valóságközeli szituáción alapuló feladatok, problémavariációk megoldására is. Kiemelt szerepet kapjanak a pénzügyi tudatosság területét érintő témák (háztartások bevételei és kiadásai; költségvetés tervezése; korszerű pénzkezelés).

Módszereink is legyenek változatosak. Alkalmazzunk gyűjtőmunkát, csoportmunkát („feladatküldés", „szakértői mozaik"), projektmunkát.

***A függvény fogalmának előkészítése*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 7. és 8.

A téma feldolgozása valóban csak előkészítés legyen, a függvény fogalmának definiálása a középiskolában történik.

Konkrét példák bemutatásán keresztül jussunk el a megfeleltetés megtapasztalásához. Adjunk példát konkrét megfeleltetésre, és a tanulók fogalmazzanak meg lehetséges hozzárendelési szabályokat. Az általános megfeleltetések közül válasszuk ki a számhalmazok közti megfeleltetéseket. Az összetartozó értékpárokat ábrázoljuk grafikonon. Gyűjtsenek a tanulók grafikonokat például reklámújságokból, más tantárgyak tankönyvi témáiból. A grafikonokat vizsgáljuk meg növekedés-csökkenés, szélsőérték, tengelyekkel való metszéspont alapján.

Az egyenes és a fordított arányosság felismerése is konkrét helyzetekben, a megfeleltetések tulajdonságainak vizsgálata közben történjen. Ez a megközelítés vezessen el a fogalom megértéséhez.

***Síkbeli alakzatok*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 7.

A témakör természetéből fakad a megfigyelésen, tapasztalaton alapuló megközelítés. Törekedjünk arra, hogy kapjon szerepet az alkotás (például párhuzamos szélű papírcsíkból négyszögek nyírása; papír négyszögek hajtogatása; papírsárkány készítése; háromszögek, speciális négyszögek átdarabolása) és az alkotáson keresztül történő megtapasztalás (például négyszögek csoportosítása; szimmetriatulajdonságok megfigyelése síktükörrel). Használjuk pontosan a szakkifejezéseket az egyes négyszögek megnevezésénél, tulajdonságaik összegyűjténél, de ezzel párhuzamosan mindig mutassunk ábrát, rajzot, még a számonkéréskor is. Az alkotásokhoz számolási feladatokat is kapcsoljunk (például papírsárkány készítéséhez szükséges papír területének becslése, számolása). Irányítsuk rá a tanulók figyelmét a közvetlen környezetükre a tanult geometriai ismeretek szempontjából, oldjunk meg gyakorlati számolási feladatokat egyénileg, csoportban vagy párban. Matematikatörténeti érdekességek gyűjtésével (például pitagoraszi számhármasok) és bemutatásával (például derékszög kijelölése csomós kötéllel) is színesítsük a téma feldolgozását.

***Transzformációk, szerkesztések*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 7. és 8.

Ebben a témakörben is a tevékenységen és a környezet megfigyelésén alapuló tapasztalatszerzést helyezzük előtérbe. Másoljunk ábrát másolópapír segítségével, és gyűjtsük össze a legfontosabb tulajdonságokat. A tapasztaltakat alkalmazzuk szerkesztési feladatokban. Ezek megoldásánál kérjük a megoldási terv indoklását. A szerkesztést hagyományos és digitális eszközökkel is végezzük el. A digitális eszközhasználat esetében kövessük az euklideszi szerkesztési lépéseket.

Gyűjtsünk példákat kicsinyítésre és nagyításra a környezetünkből (például háromszög vonalzó külső és belső pereme, makett, modell, tervrajz, fénykép, diavetítés, térkép, mikroszkóp, nagyító). A hasonlóság témakörét a középiskolai kerettanterv tartalmazza, ezt készítjük elő a megfigyeléseinkkel.

A szimmetria témában javasoljuk közös projekt készítését a vizuális kultúra, a technika és tervezés és a természettudományok tantárgyakkal.

***Térgeometria*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 8.

Ebben a témakörben is támaszkodjunk a közvetlen környezetben szerzett tapasztalatokra, az osztályterem, az iskola, az iskola környékének megfigyelésére geometriai szempontból. Szánjunk időt – órai keretek helyett, akár csoportos házi feladatként – a térszemléletet fejlesztő játékokra, tevékenységekre; építmények, rajzok, hálók, zsinóros térgeometriai modellek készítésére; az alkotások összehasonlítására és a tulajdonságaik megfigyelésére. A kitűzött feladatok mindig konkrét modellhez vagy ábrához kapcsolódjanak. A testek megépítésénél alkalmazzuk a technika és tervezés tantárgyban szerzett ismereteket.

Ismerkedjünk meg a földgömbbel matematika szempontból, és ha van rá lehetőség, akkor szerezzünk tapasztalatot a gömbi geometria alapjairól is.

***Leíró statisztika*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 8., és más témaköröknél is legyen jelen

A témához sok hétköznapi helyzetet kapcsolhatunk, a tanulók érdeklődésének megfelelően. A tankönyvi feladatok megoldása mellett végezzünk önálló adatgyűjtést is, készítsünk diagramokat, végezzünk elemzéseket, és a különböző típusú diagramokat feleltessük meg egymásnak. A konkrét példák feldolgozása során határozzuk meg, hasonlítsuk össze ugyanazon adatsor esetén a móduszt, a mediánt, az átlagot, és vonjunk le egyszerű következtetéseket.

A gyűjtőmunkát és a diagramok készítését hagyományos és digitális eszközökkel egyaránt végezhetjük, a tanulók dolgozhatnak egyénileg, párban vagy csoportban.

Lehetőség szerint készítsünk közös projektet a földrajz, a biológia, a történelem, a digitális kultúra, a fizika, a kémia, az erkölcs és etika tantárgyakkal.

***Valószínűség-számítás*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 8.

Továbbra is játsszunk a már korábban megismert játékokkal (dobókockákkal, dobótestekkel, pénzérmékkel, szerencsekerékkel, Galton-deszkával, zsákba helyezett színes golyókkal, eseménykártyákkal, számkorongokkal). Figyeljük meg ezeket előre megadott elemzési szempontok alapján (például van-e lehetetlen, van-e biztos esemény), és tippeljünk az egyes események esélyeire. A valószínűségi játékok lehetséges kimeneteleinek ismeretében biztassuk a tanulókat stratégia követésére. Az „okoseszközökön" megtalálható játékok valószínűségi szempontból való átgondolása motiválttá teszi a tanulókat a téma iránt.

Végezzünk valószínűségi kísérleteket párban vagy csoportban. Figyeljük meg a lehetséges kimeneteleket, és elemezzünk megadott szempontok szerint. A kísérletszámot digitális eszközzel megnövelve a relatív gyakoriság segítségével pontosabb becslést adhatunk a valószínűségre.

## *5.3. 9–12. évfolyam*

### 9–10. évfolyam

***Halmazok*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 9–10.

A téma egyik jellegzetessége, hogy nem csak egyes erre kijelölt órákon foglalkozunk vele, hanem a logikához hasonlóan átszövi az egész matematikaoktatást, elegendő a számhalmazokra vagy a ponthalmazokra gondolni. Ugyanakkor a mindennapokban is igen fontos bizonyos szempontok szerint csoportosítani objektumokat, ezekből részhalmazokat kijelölni különböző tulajdonságok alapján (például diszjunkt és mindent lefedő részhalmazrendszerrel), vagy halmazok elemszámát két-három halmaz esetében a logikai szita segítségével meghatározni. Játszhatunk az órán barkochbát, akár a történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálására, különböző tulajdonságok alapján.

A „végtelen” fogalma nehéz, de általában a tanulók érdeklődését felkeltő téma. Érdemes kiemelni, hogy ha kilépünk a véges halmazok köréből, akkor a rész nem feltétlenül „kisebb”, mint az egész (például páros számok vagy prímek és az összes természetes szám viszonya számosság tekintetében). A halmaz számossága esetében a fogalom alapja az egy-egyértelmű megfeleltetés, amire mindenképpen konkrét konstrukciókat adjunk, megmutatva a megfelelő hozzárendelést, kapcsolódva ezzel a függvények témaköréhez is.

***Matematikai logika*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 9–10.

A középiskola első két évfolyamán cél, hogy a tanulókban megszülessen a (nem kizárólag matematikai) érvelés igénye, megismerjék a legalapvetőbb logikai ismereteket, összefüggéseket. Így a deduktív gondolkodás alapvető feltételéhez juthatunk, és bemutathatjuk a matematikai bizonyítás fogalmát. A „bizonyítás” alatt nem csak konkrét tételek bizonyítását értjük. Ide tartozik bármilyen állítás igazságtartalmának megállapítása megfelelő kiindulásból, két-három helyes logikai lépésen keresztül. Konkrét helyzetekben fontos a kizáró és a megengedő „vagy” megkülönböztetése. Hívjuk fel a tanulók figyelmét arra, hogy a hétköznapi szóhasználat ebben az esetben eltér a matematikaitól. A „minden” és a „van olyan” típusú állítások bemutatására javasoljuk a matematikai állítások mellett egyszerű hétköznapi állítások megfogalmazását is. Igazságtartalmuk elemzésére játsszunk a tanulókkal „bírósági tárgyalás”-t, ahol az osztály tanulóit védőkre és vádlókra felosztva, kérhetjük egy (matematikai) állítás indoklását vagy cáfolatát. Lehetőség szerint szánjunk néhány tanórát stratégiai játékokra (sakk, malom vagy más táblajátékok). A játékot kövesse a tapasztalatok megfogalmazása, nyerő stratégiák megalkotása.

***Kombinatorika, gráfok*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 9–10.

Hangsúlyozzuk, hogy mindkét terület nagyon jól használható a matematika alkalmazásainak bemutatására. Emellett egymásra is utalhatnak: a kombinatorikai feladatok egyik összeszámlálási modellje fagráfok rajzolása.

A kombinatorika esetén a fő hangsúly a gondolkodásmód fejlesztésén van a mechanikus feladat-kategorizáció és a hozzá tartozó képletek megtanulása és alkalmazása helyett. Tudatosan törekedjünk olyan feladatok kitűzésére, melyek a sajátos feltételeik miatt nem oldhatók meg egyetlen képlet alkalmazásával. Fontos a két alapvető összeszámlálási elv (összeadási és szorzási) megfelelő alkalmazásának megértése. Lehetőségünk van a geometria és a kombinatorika összekapcsolására is feladatokon keresztül.

A gráfokról ezen a szinten mint szimmetrikus kapcsolatok modelljéről beszélünk, és ehhez kapcsolódva vezetjük be az alapvető fogalmakat. Hangsúlyos az alkalmazások szerepe, kevesebb az absztrakt, elméleti problémafelvetés. Érvelésekben és indoklásokban is gyakran használunk gráfokat. 9–10. évfolyamon el kell jutni valóságos vagy matematikai szituációk gráffal történő szemléltetéséhez és bizonyos tulajdonságok leolvasásához a megkonstruált gráfról. Fontos a térgeometriai kapcsolat. A testek hálója már általános iskolában szereplő fogalom, de ennek gráfként történő értelmezése új lehetőséget teremt. A poliéderek csúcs-, él- és lapszámai közti összefüggések megfigyelése csoportmunkában végezhető feladat lehet. Érdemes olyan egyszerű rejtvényekkel is megismertetni a tanulókat, melyek gráfok segítségével jobban érthetők, átláthatók és megoldhatók (például öntögetéssel kapcsolatos kérdések, „farkas-kecske-káposzta” feladat, igaz-hamis állítások, bírósági szituációk modellezése). A gráfok alkalmazása sokrétű: gazdaságos úthálózatok tervezése, szállítási feladatok, internetes kapcsolatok, kis és nagy hálózatok szemléltetése és tanulmányozása.

A téma alkalmas az algoritmikus gondolkodás fejlesztésére. Tanításakor javasoljuk digitális eszközök használatát.

***Számhalmazok, műveletek*** (8 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

Felső tagozatról a természetes számok és racionális számok ismeretével, illetve négyzetszámok négyzetgyökének ismeretével érkeznek a tanulók, így a spiralitás elve alapján lehet tovább haladni az irracionális számokkal való ismerkedéssel, ezek szemléltetésével. Helyezzünk hangsúlyt a számológép helyes használatának elsajátítására.

***Hatvány, gyök*** (14 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

A hatványozás már a 7-8. évfolyamon megjelenik, így ennek a témakörnek is megvannak az általános iskolai alapjai. Az azonosságokat példán (konkrét alapszám, tetszőleges pozitív egész kitevő) fedezzük fel, majd a sejtésünket a példán bizonyítsuk. A hatványozás tekintetében sok szemléletes feladatra van lehetőség, ilyen például a papírlapok hajtogatásából adódó „papírlaptorony" magasságnövekedése vagy a sakktáblára elhelyezett, duplázódó búzaszemek problémája.

Az új kerettanterv szerint ezen az évfolyamon jelenik meg először a négyzetgyökvonás definíciója. A 8. évfolyamon a négyzetszámok négyzetgyökének meghatározását ismerik meg a tanulók.

***Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

A témakör címéből is látszik, hogy az algebrai kifejezések esetében is nagy hangsúly van az alkalmazáson. Tartózkodjunk az algebrai átalakítások nagy számban történő, öncélú gyakoroltatásától.

Új ismeret az $(a + b)^2$, az $(a - b)^2$ és az $(a + b)(a - b)$ kifejezésekre vonatkozó nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában). Törekedjünk az ismeretek begyakorlására, elmélyítésére, hiszen alkalmazni szeretnénk majd a szorzattá alakításban, a teljes négyzetté pótlásban, a másodfokú egyenlet megoldóképletének előkészítésében és a másodfokú függvények ábrázolásában is. A begyakoroltatást és elmélyítést játékos eszközökkel segíthetjük. Készíthetünk a témához köthető kártyákat a Dobble-játék mintájára vagy memóriajátékot. Az érdeklődő tanulóknak mutassuk meg a nevezetes azonosságok geometriai modellezését.

***Arányosság, százalékszámítás*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

A százalékszámítás igen fontos témaköre a matematikának, hiszen az élet számtalan területén találkozunk vele: például a boltok vásárlási akcióiban, a valószínűség megadásában, a gazdaság és a pénzügy területéről származó problémákban. Érdekes projektfeladat lehet a háztartásban előforduló költségekkel kapcsolatos számlák elemzése, az azokon megjelenő fix és változó egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével. A téma lehetőséget ad a földrajz, a fizika, a kémia, a technika és tervezés, a gazdasági számítások és a társadalomismeret tantárgyakkal közös projekt készítésére.

***Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

A témakör újdonsága, hogy a jelenleg érvényben lévő kerettantervhez képest több időt szán elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szöveges feladatok megoldására. Törekedjünk a problémamegoldás legfontosabb lépéseinek (információgyűjtés – megoldásistratégia-alkotás – modellalkotás – megoldás – ellenőrzés) tudatosítására és következetes alkalmazására. A különböző beállítottságú tanulók miatt fontos az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldásának több különböző módját bemutatni. Tűzzünk ki nyílt végű problémákat, találkozzanak a tanulók lehetetlen helyzetre vezető feladatokkal, tudják kezelni a feladatban szereplő, a megoldás szempontjából felesleges adatokat.

***Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 10.

A másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása erősen kapcsolódik a másodfokú függvények ábrázolásához. Javasoljuk a megoldóképlethez vezető gondolatmenet bemutatását konkrét egyenlet megoldásával, amit kiegészíthet a megoldóképlet bizonyítása is. Térjünk ki az egyenletek ekvivalens átalakításának és az ellenőrzés fontosságának kérdéseire is.

***A függvény fogalma, függvénytulajdonságok*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

A függvény fogalmának megismerését hétköznapi hozzárendelések megfigyelésével kezdjük. Hozzunk példákat a hétköznapi életből és más tantárgyakból egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű és nem egyértelmű hozzárendelésekre. Törekedjünk arra, hogy a tanulók meg tudják különböztetni egymástól a függvényt mint egyértelmű hozzárendelést, és a függvény grafikonját mint – elsősorban – számhalmazokon értelmezett függvény reprezentációjának egy formáját. A függvény grafikonjának felrajzolását először értéktáblázattal, később a függvénytranszformációs lépések értő használatával végezzük. Figyeljünk arra, hogy ez utóbbi ne kizárólag mechanikusan történjen. Törekedjünk az egyre precízebb szóhasználatra, gyakoroltassuk a „valamihez hozzárendelünk valamit” szerkezetet minél több matematikán kívüli és matematikai helyzetben. A tanult függvényeket alkalmazzuk arra, hogy megmutatjuk egyenletek és egyenlőtlenségek megoldását. Használjuk fel ismereteinket arra, hogy a megoldóképlet ismerete előtt oldjanak meg a tanulók grafikus úton másodfokú egyenleteket. Szintén másodfokú függvények segítségével mutathatunk példát egyszerű szélsőérték-feladatok megoldására, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérésével. Mutassunk valós alkalmazási lehetőségeket: időben lejátszódó folyamatok múltbeli megfigyelése és jövőbeni várható alakulása (pl. klímaváltozás); gyakorlati helyzetekben döntés elősegítése (pl. fix és változó összetevőkből álló számla fizetése esetén különböző ajánlatok összehasonlítása, a kedvezőbb kiválasztása); mozgó testek idő-út grafikonjának felrajzolása és ezekből információk leolvasása a függvénytulajdonságok alapján (pl. meredekség). Miután már kellő gyakorlatot szereztek a tanulók a függvények hagyományos, füzetben történő ábrázolásában, mutassuk meg a függvények ábrázolását digitális környezetben is. Érdeklődő tanulóknak érdemes megmutatni az algebrai úton még nem (pl. irracionális eredményre vezető) vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldását is a digitális eszköz segítségével.

***Geometriai alapismeretek*** (8 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

Ebben a részben olyan alapvető geometriai fogalmak, metrikus összefüggések és szerkesztési eljárások ismétlése és rendszerezése történik, amelyek – legalábbis alkalmazás szintjén – előkerültek már a felső tagozaton is. Az itt megjelenő fogalmak, összefüggések, algoritmusok pontos ismerete nemcsak a későbbi, a tananyagban előforduló matematikai alkalmazások szempontjából fontosak, hanem a hétköznapi alkalmazások szempontjából is.

A fejlesztési feladatokhoz kapcsolódóan keressünk az osztályteremben, a bútorokon olyan megfelelő egyenespárokat, amelyek egyenesek kölcsönös elhelyezkedésének lehetőségeit illusztrálják. Becsüljünk, majd mérjünk távolságokat megfelelő objektumok között. Határozzunk meg valódi távolságokat, készítsünk túratervet csak méretarányt tartalmazó térképek alapján.

A szögpárokra vonatkozó fogalmak pontos használata fontos a későbbi geometria tananyag szempontjából, ezért gyakoroltatni kell a megfelelő szögpárok felismerését és előállítását (pl. papírhajtogatással).

A metrikusan definiált ponthalmazok tanítása során fontos hangsúlyozni, hogy „azok és csak azok" a pontok tartoznak a ponthalmazhoz, amelyekre teljesül a metrikus feltétel. A fogalmak és a tulajdonságok pontosítása és alkalmazása felfedeztető módon, a tanulók aktív konstrukciós (szerkesztések) és problémamegoldó tevékenysége mentén történjen. Fontosnak gondoljuk, hogy az alapszerkesztéseket a tanulók papíron, euklideszi módon (egyélű vonalzóval, és adott távolság „mozgatására" alkalmas, állítható körzővel) is el tudják végezni. A dinamikus geometriai szoftverek alkalmazásával az alapszerkesztések egyetlen kattintással megoldhatók, így ezek alkalmazása az összetettebb, több feltételt tartalmazó és/vagy gyakorlati jellegű problémák megoldása esetén javasolt. Például adott térképen keressünk adott helységektől egyenlő távolságra található helyeket.

***Háromszögek*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

Ebben a részben is sok az olyan fogalom és ismeret, amely felső tagozaton előkerül valamilyen szinten. A korábban tanultak felelevenítését és rendszerezését feladatok mentén, a tanulók aktivitását igénybe vevő módon javasoljuk.

A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek közül az oldalfelező merőlegesek, valamint a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása is szerepel a fejlesztési feladatok között. Ezeket felfedeztető módon, a tanulók önálló, illetve irányított tevékenységéhez kapcsolva, ha lehetséges, dinamikus geometriai szoftverek alkalmazásával javasoljuk tárgyalni. A tanulói foglalkoztatás történhet pármunkában vagy csoportmunkában.

A Pitagorasz-tétel bizonyításának és a háromszög szokásos területképletének előkészítése céljából érdemes egyszerű sokszög-átdarabolási feladatokat végeztetni a tanulókkal egyéni, páros vagy csoportmunkában „igazi" darabolással (ceruza, papír, olló felhasználásával) vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával. A Pitagorasz-tétel legismertebb, átdarabolós bizonyítása egy ilyen „feladat" lehet, és elegendő a tételt kimondani a feladat megoldása után. Javasoljuk, hogy a téma tanítása során oldjanak meg a tanulók különböző típusú tangramokhoz kapcsolódó rejtvényszerű feladatokat is.

***Négyszögek, sokszögek*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

Ebben a témakörben a felső tagozatos ismeretekre alapozva történik meg a speciális négyszögek osztályozása és tulajdonságaik rendszerezése. Ezek később, az egybevágósági transzformációk, illetve a speciális szimmetriák kapcsán is előkerülnek.

Az egyes négyszögek területére vonatkozó formulákat, illetve a sokszögek szögösszegeire vonatkozó összefüggéseket és bizonyításokat célszerű a tanulókkal felfedeztetni egyéni, pár- vagy csoportmunkában hajtogatással, esetleg dinamikus geometriai szoftvert alkalmazva.

A szabályos sokszög fogalmának ismerete és speciális esetben (pl. szabályos hatszög) a terület átdarabolással történő meghatározása is elvárható 9. évfolyamon, viszont a szabályos sokszög területére vonatkozó általános formula felfedeztetése a szögfüggvények megismerése után, 11. évfolyamon indokolt.

Ehhez a témakörhöz javasolt projektfeladat: az iskola vagy a lakás alaprajzának elkészítése méretarányosan papíron vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával.

***A kör és részei*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 9.

Bár ennek a témakörnek néhány fogalma előfordul már felső tagozaton is, az ismeretek és összefüggések ebben a részben általában újak.

A középponti szög nagysága és a hozzá tartozó körív hossza közötti egyenes arányosságot méréssel, az adatok táblázatba foglalásával javasolt felfedeztetni. A körcikk területére vonatkozó arányosságot is felfedeztetéssel, speciális esetek vizsgálatával, majd az ezekből levonható következtetés megfogalmazásával javasoljuk tanítani.

A kör részeinek területe csak speciális esetekben tárgyalható 9. (esetleg 10.) évfolyamon. Az általános képletekhez szükség van a szögfüggvényekre, így ezek megismerése és alkalmazása 11. évfolyamon indokolt.

A Thalész-tétel és bizonyítása is felfedeztethető szerkesztéssel és méréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával. A tanár által irányított felfedeztetés során a tanulók dolgozhatnak egyénileg, párban vagy kisebb csoportban.

***Transzformációk, szerkesztések*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 9., 10.

A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés felső tagozaton is a kerettanterv része. 9. évfolyamon az egybevágósági transzformációk a kapcsolódó fogalmakkal, relációkkal, szerkesztésekkel szerepelnek, 10. évfolyamon pedig analóg felépítésben a hasonlósági transzformáció. Így a javasolt 20 óra két évfolyamra oszlik el: 9. évfolyamra 12–13 óra, a 10. évfolyamra 7–8 óra indokolt.

Javasoljuk, hogy a téma tanításának kezdetekor mutassunk példákat geometriai hozzárendelésekre (pl. merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés). A „geometriai hozzárendelés" megfogalmazás jelzi, hogy ezek a matematikai és a hétköznapi életből vett példák nem feltétlenül „transzformációk", azaz az értelmezési tartomány kölcsönösen egyértelmű önmagára képezései.

Középiskolában a síkbeli egybevágósági transzformációkat sokféleképpen lehet tanítani, egy lehetséges felépítés a következő: tengelyes tükrözés, a tengelyes szimmetria és a tengelyesen szimmetrikus alakzatok tárgyalása után

- a középpontos tükrözést két, egymásra merőleges tengelyes tükrözés szorzataként (egymásutánjaként);
- a pont körüli forgatást két, egymást metsző tengelyre vonatkozó tükrözés szorzataként;
- a párhuzamos eltolást két, egymással párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzataként értelmezzük.

Így a megfelelő transzformációk tulajdonságai eredeztethetők a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból, és a vektor fogalmát a párhuzamos eltolás segítségével lehet kialakítani.

Az internet lehetőségeinek felhasználásával képzőművészeti alkotások (pl. M. C. Escher és Victor Vasarely képei), épületek megfigyelése, elemzése a lehetséges szimmetriák szempontjából projektfeladat is lehet, de tanórai körülmények között pár- vagy csoportmunkában is végezhető.

Az egybevágósági transzformációk és az egybevágósági reláció tanításához kapcsolódó tartalmak és tevékenységek egy lehetséges feldolgozási módja:

1. A korábban már megismert sokszögek (háromszögek, négyszögek, szabályos sokszögek) szimmetriák (tengelyes, középpontos, forgási) alapján történő osztályozása, rendszerezése.
2. A háromszög, a trapéz és a paralelogramma középvonalaira, illetve a háromszög súlyvonalaira vonatkozó tételek felfedeztetése (esetleg bizonyítása) dinamikus geometriai szoftver segítségével.
3. Egyszerű, valamelyik egybevágósági transzformáción vagy alakzatok egybevágóságán alapuló szerkesztések és azok diszkussziója. A dinamikus geometriai szoftver lehetőséget teremt a szerkeszthetőség feltételeinek dinamikus vizsgálatára.
4. A sík egybevágó háromszögekkel és egybevágó négyszögekkel is lefedhető egyrétűen és hézagmentesen. A lefedési algoritmus megfelelő egybevágósági transzformációk ismétlődő végrehajtásából tevődik össze. Ezek az algoritmusok felfedeztethetők dinamikus geometriai szoftver segítségével. Tanórán párokban vagy kisebb csoportokban is dolgozhatnak a

tanulók. Adhatunk ebben a témakörben projektfeladatot is, például: keressünk olyan síklefedéseket, ahol a lefedő alakzatok (nem feltétlenül azonos oldalszámú) szabályos sokszögek.

5. Szimmetriára épülő stratégiai játékokkal is egészítsük ki ennek az anyagrésznek a tanítását. Például kör alakú táblára két tanuló felváltva rak egyforma korongokat úgy, hogy azok nem fedhetik át egymást, és teljesen a táblán kell lenniük. Kinek van nyerő stratégiája, és mi ez a stratégia?

10. évfolyamon javasolt tanítani a középpontos hasonlóságot és a hasonlóságot. A felső tagozatos kerettanterv a kicsinyítés és a nagyítás fogalmát tartalmazza, jelentésüket szemléletesen, gyakorlati alkalmazások segítségével mutatja be.

Fontosak a hasonlóság hétköznapi alkalmazásai, ezért projektfeladatként vagy tanítási órán csoportmunkában végezhető feladatként mindenképpen érdemes ilyeneket feldolgoztatni a tanulókkal. Például az iskola közelében található magas épület magasságának meghatározása napfényes időben egy 1 méteres bot és mérőszalag segítségével vagy térkép alapján a valódi távolságok meghatározása a méretarány ismeretében.

***Leíró statisztika*** (10 óra) és ***Valószínűség-számítás*** (8 óra)

Javasolt évfolyam: 9–10.

A két témakör feldolgozása 9–10. évfolyamon sokszor egyazon tevékenység alapján történik, ezért célszerű a két témakört összefüggéseiben tárgyalni. A kapcsolódásra egy példa lehet a véletlen kísérletek és játékok tényleges végrehajtása és az eredményeik szisztematikus feljegyzése, grafikus szemléltetése, bizonyos események bekövetkezésének gyakorisága, relatív gyakorisága.

A témakörök tanítása során az egyik konkrét gyakorlati példa lehet az a kérdés, hogy egy társasjáték megkezdésekor az első hatos dobás hányadik dobásra következik be. Ez egyben lehetőséget biztosít annak a megvizsgálására, hogy mikor melyik statisztikai jellemző ad számunkra értelmezhető eredményt. Az átlag megmutatja, hogy „várhatóan" mennyit várok a játék kezdésére, a módusz azt, hogy leggyakrabban hányadik körben fogok bekerülni, míg a medián alapján azt tudom megmondani, hogy az esetek felében legalább ennyit kell várjak, a másik felében többet. (Érdekes, hogy ebben a példában mindhárom jellemző más értéket vesz fel, ami a háttérben meghúzódó geometriai eloszlás egy jellegzetessége.)

A valószínűség statisztikai megalapozásához nagyon ajánlott eszköz a szimulációk bemutatása. A szimulációkban fontos felhívni a figyelmet két egymásnak elsőre ellentmondónak tűnő tényre: egyrészt, hogy nagyon hosszú sorozatokban elenyészően kevés olyan eset lesz, ahol a relatív gyakoriság „messze van a valószínűségtől”, ezzel szemben mégis pl. két egyenlően valószínű kimenetelnek (fej, írás) a gyakoriságai akármilyen nagy mértékben eltérhetnek egymástól nagyon hosszú sorozatokban.

A klasszikus valószínűségi játékok fontosságát az adja, hogy a kísérletek sokszori ismétlésével a relatív gyakorisággal közelíthetjük az esemény valószínűségét akkor is, amikor nincs lehetőség „elméleti esély” meghatározására. Ilyen esemény lehet például az, hogy egy rajzszög leejtésénél milyen valószínűséggel esik a rajzszög a „lapos” oldalára. (A hétköznapi életben ezt használják például biztosításokkal kapcsolatos számítások elvégzése során, ahol más alapja a valószínűségek becslésének nincs is, mint a statisztikákból a relatív gyakoriságok felhasználása.) Emiatt is fontos, hogy a valószínűség fogalmának előkészítése ne csak a klasszikus valószínűségi modellre hivatkozzon, hanem a statisztikai és a szubjektív esélylatolgatás is szerepet kapjon.

Néhány további példa szemléletformáló valószínűségi játékokra:

- Játék eseménykártyákkal gyakoriság becslésére: mindenki előtt ott van minden eseménykártya, amelyekre a játékosok a játék elején tetszés szerint kiraknak 10-10 zsetont; sorban végezzük a kísérleteket; amelyik kártyán lévő esemény bekövetkezett, arról a kártyáról levehet a játékos egy zsetont; az győz, akinek a kártyáiról leghamarabb elfogynak a zsetonok.
- Tippelős játék eseménykártyákkal: minden kártyára mindenki odaírja a tippjét, hogy 20 kísérletből hányszor következik be; ellenőrizzük a kísérletek elvégzésével.
- Valószínűségi kísérlet nem kocka alakú gyufásdoboz feldobásával: tippelés, 20 kísérletből melyik lapjára hányszor esik; ellenőrzés a kísérletek elvégzésével.

A téma nagyon jó lehetőséget ad különböző, akár tantárgyközi projektek megvalósítására is. Szervezzünk közvéleménykutatást osztály- vagy iskolai szinten, értékeljük, értelmezzük az eredményeket.

**11–12. évfolyam**

***Halmazok, matematikai logika*** (6 óra)

Javasolt évfolyam: 11–12.

Ezen a két évfolyamon már eljuthatnak a tanulók a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok megértésére. Szintén elvárható, hogy szóbeli és írásbeli megnyilvánulásaikban pontosan használják a logikai kifejezéseket; erre nem csak a matematikaórákon van szükség. Továbbra is lényeges, hogy a matematikai gondolkodás egyik alapvető konstrukcióját, a bizonyítást egyszerű és kézzelfogható példákon keresztül megértessük a tanulókkal, és képesek legyenek egyszerű geometriai, algebrai állítások igazságtartalmának néhány lépésben történő megállapítására.

***Kombinatorika, gráfok*** (10 óra)

Javasolt évfolyam: 11–12.

Ezeken az évfolyamokon a kombinatorika feladatok megoldása már – a nagy elemszám miatt – történhet képlettel is, de továbbra is ügyeljünk a sematikus kategóriák kerülésére. Érdemes időt szánni különböző kártyajátékokban, így pl. a tanulók körében népszerű pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározására, vagy foglalkozhatunk más kártyajátékok esetében (például ulti, snapszer) adott leosztás utáni megfelelő stratégia tervezésével. Törekedjünk annak bemutatására, hogy különböző problémák esetén a lehetséges esetek összeszámlálását többféleképpen is elvégezzük, fedeztessük fel a tanulókkal az ezekből következő egyszerű kombinatorikus összefüggéseket. Szánjunk időt a visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel eljátszására, a tapasztalatok megfogalmazására, mielőtt a matematikai képleteket felírjuk.

A gráfok esetében konkrét helyzetekből kiindulva fogalmazzunk meg olyan, fokszámokra vonatkozó állításokat, melyek általánosan is érvényesek. Mutassuk meg, hogy bizonyos fokszám-kombinációk nem valósulhatnak meg. Megvalósítható fokszám-kombinációkhoz rajzoljunk megfelelő gráfot.

***Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése*** (14 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

A korábbi tantervekhez képest ez a témakör magasabb évfolyamokon szerepel. A témakörnek megvannak az általános iskolai alapjai, így azokra építve lehet folytatni a tananyagrész ismereteinek mélyítését. Fontos, hogy a középiskola végére a tanulókban megfelelő szemléletes kép alakuljon ki a számhalmazok felépítéséről a valós számok halmazával bezárólag.

***Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

Itt kerül elő a korábban már megjelent tananyagtartalmak folytatása, kiterjesztése: az n-edik gyök fogalma, a racionális kitevőjű hatvány és – a hatványozás irracionális kitevőre történő szemléletes bemutatása után – az exponenciális függvény és ábrázolása. Az új tantervi szabályozó a logaritmusra mint konkrét gyakorlati problémák megoldásának eszközére tekint. Érdemes a témakörbe bevonni a hétköznapi életből vett gazdasági feladatokat, illetve a többi tantárgyhoz kapcsolódó problémákat bemutatni, megoldani.

***Exponenciális folyamatok vizsgálata*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

Az exponenciális folyamatok vizsgálata kiváló lehetőséget ad arra, hogy a tanulók az eddig megszerzett matematikai és matematikán kívüli ismereteiket valódi, a természetben és a társadalomban felvetődő problémák megoldására használják fel. Internetes oldalak, más tantárgyak feladatai, a matematikai feladatgyűjtemények és a korábbi érettségi feladatsorok sok jól használható példát mutatnak ezekre a jelenségekre. Bátorítsuk tanulóinkat, hogy ők maguk is keressenek a témakörbe illő problémákat. A téma és a javasolt óraszám lehetőséget biztosít projektmunkák végzésére csoportban vagy egyénileg. Különösen érdekes és hasznos lehet táblázatkezelő program segítségével a rendelkezésünkre álló adatok ábrázolása (az adatokra trendvonalat illeszteni; a lineáris vagy másodfokú vagy exponenciális trend paramétereit értelmezni; ezek segítségével az adott folyamat jövőbeli alakulására következtetni; összehasonlítani a különböző trendek illeszkedését).

***Sorozatok*** (18 óra)

Javasolt évfolyam: 12.

A tanulók már korábban is találkoztak sorozatokkal, természetesen a pontos definíció kimondása nélkül. Ezt a témakört is érdemes olyan példákkal felvezetni, amelyek alkalmasak a tanulói érdeklődés felkeltésére: a Fibonacci-sorozat, az első 100 szám összeadása a „kicsi" Gauss módszerével, a sakktáblára elhelyezett, duplázódó búzaszemek problémája. A számtani és mértani sorozat legfontosabb fogalmainak és összefüggéseinek megismertetése után törekedjünk arra, hogy a megoldásra kerülő problémák kevésbé legyenek formálisak, keressünk a mindennapi életből olyan példákat, amelyek – ha csak közelítőleg is – valamilyen nevezetes sorozat segítségével modellezhetők.

Igazodva a világ változásához és ahhoz a jogos elváráshoz, hogy az érettségivel rendelkező állampolgárok pénzügyi tudatossága a jelenleginél nagyobb legyen, a tanterv ezen a területen a korábbinál több ismeretet vár el a tanulóktól. A gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet számítása első lépésben kisebb számokkal és kis elemszámmal történjen. Később is törekedjünk arra, hogy az ilyen típusú feladatok megoldása ne kizárólag egy-egy képlet alkalmazását jelentse. A témakör és a javasolt óraszám kiváló lehetőséget biztosít projektmunkák végzésére csoportban vagy egyénileg. A tanulók internetes adatgyűjtés segítségével hasonlíthatnak össze különböző pénzügyi termékeket (betét, hitel stb.). Az interneten gazdag továbbképzési anyagok, kiadványok segítik az órákra való felkészülést.

***Trigonometria*** (14 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

Ez a témakör a korábbi tantervekben a 10. évfolyamos tananyag része volt. Ebben, a korosztály számára tanítandó minimális tananyagot tartalmazó kerettantervben azért került későbbre, mert más tantárgyak (főleg a fizika) kerettanterve nem igényli korábban a szögfüggvényeket, és a tananyag „széthúzásával" az alaposabb megértést és elsajátítást lehet segíteni. Az alkalmazási lehetőségeket, különösen a hétköznapi életben történő alkalmazás lehetőségeit mérlegelve lényeges változás a korábbi tantervekhez képest, hogy a szögfüggvényeket csak hegyes- és tompaszögekre értelmezzük, nem terjesztjük ki a fogalmakat a valós számok halmazára, így kimaradnak a minimum tananyagból a trigonometrikus függvények is.

A szögfüggvények bevezetése és elsődleges alkalmazása kapcsán adhatók a tanulóknak olyan projektfeladatok, amelyek a trigonometria hétköznapi alkalmazási lehetőségeinek (például tervezés, lakberendezés, ácsmunka tetőszerkezetek tervezése és kivitelezése során, GPS működése) felkutatását, összegyűjtését tűzik ki célul. A „kutatócsoportok" egy kiselőadás során számoljanak be a többieknek eredményeikről.

A szögfüggvények egy lehetséges gyakorlati alkalmazása: az iskolához közeli parkban, játszótéren vagy az iskola udvarán kijelölt háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása mért távolságok és szögek alapján, lehetőleg csoportmunkában. Hasonlóképpen csoportmunkában meg lehet határozni az iskolához legközelebbi magas épület (pl. templom) magasságát emelkedési szög- és távolságmérés alapján.

***Térgeometria*** (20 óra)

Javasolt évfolyam: 12.

Bizonyos térelemek és testek fogalmát már ismerik a tanulók korábbi tanulmányaikból, alapvető tulajdonságaikat fel tudják sorolni. Most a vizsgált testek köre bővül némiképp (például csonkagúla, csonkakúp), a kapcsolódó fogalmak és összefüggések alkalmazására pedig bővebb és pontosabb matematikai eszköztár áll rendelkezésre.

A méretnek megfelelő, észszerű mértékegységek kiválasztása fontos kompetencia a hétköznapi életben is. Javasolt a méretarány ismeretében makettek, 3D-s szimulációk alapján a reális méreteket megbecsültetni, majd kiszámíttatni a tanulókkal.

Kiváló gondolkodtató feladatok adhatók a tanulóknak a testek hálójával kapcsolatban. Néhány példa a kérdések jellegére:

- Egyik oszlopban testek, a másik oszlopban más sorrendben a hálójuk. Kössük össze a megfelelőket.
- Adott háló alapján állítsuk elő a megfelelő testet.
- Adott testnek melyik lehet a hálója a megadott hálók közül?

Fontos, hogy térfogat- és felszínszámítási feladatokat a mindennapi életben előforduló testekhez kapcsolódóan is tárgyaljunk. Néhány példa a mindennapi életben előforduló testekre: üdítős doboz, vizes flakon, tejes doboz, tejfölös doboz, közel gömb alakú gyümölcsök, geometrikus formájú épületek. Néhány nevezetes nagyobb épület (például a párizsi Louvre bejárataként épített üvegpiramis) térfogatát és felszínét is javasolt meghatározni az internetről gyűjtött adatok felhasználásával. Közel gömb alakú gyümölcsök felszínét és térfogatát előbb célszerű megbecsültetni a tanulókkal, majd a becslés pontosságát ellenőriztessük mért adatokból számított értékekkel. Egy iskolai földgömb és a méretarány ismeretében mért adatokkal végzett számítások alapján becsültessük meg a tanulókkal a Föld felszínét és térfogatát, és vessük ezt össze a valódi adatokkal. Ez a tevékenység végeztethető pár- vagy csoportmunkában is. Tanulói csoportoknak kiadható projektfeladat, hogy gyűjtsenek információkat, érdekes példákat a gömb szerepéről, megjelenési formáiról a hétköznapi életben; a matematikában (esetleg gömbi geometria alapjai, nem-euklideszi geometriák történeti vonatkozásai); a természettudományokban; a művészeti ágakban.

***Koordinátageometria*** (14 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

A korábbi tantervekhez képest ennek a témakörnek a tananyaga jelentősen csökkent. A kimaradó részek:

- két vektor skaláris szorzata;
- háromszög súlypontjának koordinátái;
- irányvektor, normálvektor fogalma;
- egyenes egyenletének irányvektoros és normálvektoros alakja;
- kör és egyenes metszéspontjának meghatározása, adott körhöz megfelelő érintő egyenletének felírása.

A vektor fogalma nagyon fontos a matematikában és a természettudományokban. Fontos, hogy a vektorműveletek és kapcsolódó fogalmak alkalmazása változatos tanítási környezetben jelenjen meg. A dinamikus geometriai szoftverek lehetőséget teremtenek arra, hogy a vektorokkal történő feladatmegoldás szemléletesen, konstruktív, adott esetben játékos formában történjen. A koordináta-rendszerben történő eligazodást és tájékozódást előkészítő tevékenység lehet adott térképen adott hely keresése a szélességi és hosszúsági adatok ismeretében. Hasonló okokból javasolt a tanulókkal a „torpedó”-hoz hasonló játékokat játszatni a koordináta-rendszerben.

A koordinátageometria „számolós geometria”. Nagyon fontos viszont, hogy a számolás mindig a geometriai tartalom tisztázása után történjen.

Mint már jeleztük, a korábbi tantervekhez képest a mag-kerettantervben az egyenes egyenletének csak az iránytényezős alakja maradt, így értelemszerűen az irányjellemzők közül is kimaradt az irányvektor és a normálvektor. Ennek oka az, hogy az egyenes egyenletének ez az alakja megegyezik a lineáris függvény grafikonjának egyenletével, ezért egyrészt lehetőséget teremt a két témakör összekapcsolására, másrészt nem jelent teljesen új ismeretet a tanulók számára, harmadrészt kevesebb algebrai természetű nehézség lép fel a kapcsolódó feladatok megoldásában.

Ennek az anyagrésznek a tanítása során játék jelleggel (pl. oroszlánfogás) egyszerű elsőfokú kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszerek megoldása is előkerülhet szemléletesen, dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával.

A kör egyenlete kapcsán a korábbi tantervekhez képest a csökkenést alapvetően a kör és egyenes, illetve két kör kölcsönös helyzetének meghatározására vonatkozó kérdések, feladatok elhagyása jelenti. Ezek ezen a minimumszinten elsősorban a komoly algebrai és számolási nehézségeket jelentő másodfokú egyenletrendszerek elkerülése miatt maradtak ki.

A körökkel kapcsolatban a koordináta-rendszerben dinamikus geometriai szoftver felhasználásával különböző játékok segíthetik a gyakorlást (például célba lövés, szimmetrikus „virágminták” rajzolása).

***Leíró statisztika*** (12 óra)

Javasolt évfolyam: 11.

Szeretnénk, ha ebben a témakörben a tanítás középpontjába a kapott adatok, diagramok értelmezése, értékelése kerülne. Ne csak a jellemzők kiszámítása, grafikonok készítése és ezekről történő adatleolvasás szerepeljen a tanórákon, hanem döntés előkészítésében, következtetések levonásában is használják ezeket a tanulók. Fontos kérdés, miként lehet grafikus manipulációkkal befolyásolni az olvasót vagy a döntéshozót az internetes vagy a nyomtatott sajtóban. Fontos a térbeli diagramok torzító hatásának felismerése, akár oszlop-, akár kördiagram esetén, valamint a görbék tendenciájának befolyásolása a lépték meghatározásának manipulálásával, a tengelyek nem 0-ról indításával vagy megtörésével. A manipulációkat ne csak a sajtóban vagy a szórólapokon található diagramok elemzésével mutassuk be a tanulóknak, hanem ők maguk is készítsenek ilyen ábrákat, előre meghatározott manipulációs szándékkal. A Simpson-paradoxon, mint javasolt tevékenység, olyan meglepő helyzetekről szól, amelyek akkor léphetnek fel, ha egy csoportot valamilyen szempont szerint részekre bontunk. Ekkor előfordulhat, hogy hiába érvényes egy megállapítás minden részcsoportra, az egészre az ellentéte teljesül.

Nagy adathalmazok összehasonlítására alkalmas eszköz az ún. box-plot (sodrófa) diagram, ami egyfelől nemzetközi elterjedtsége miatt, másfelől különböző adathalmazok összehasonlításának kitűnő eszközeként került be a tantervbe.

***Valószínűség-számítás*** (16 óra)

Javasolt évfolyam: 12.

Változatlanul követelmény a klasszikus valószínűségi modell ismerete és alkalmazása. Ennek kizárólagosságát szeretnénk megszüntetni, ezért került a tantervbe egy másik, hasonló modell: a geometriai valószínűség modellje. Ez kitűnő alkalmat teremthet a matematikán belüli kapcsolódások kihasználására, a terület- és térfogatszámítás felelevenítésére.

Még 12. évfolyamon is javasoljuk valószínűségi kísérletek valódi végrehajtását, amit kiválthat digitális eszköz felhasználása a kísérletek elvégzésének szimulálására; a kapott gyakoriságokat és relatív gyakoriságokat foglaljuk táblázatba; a tanulók adjanak előzetes becslést az egyes kimenetelek (relatív) gyakoriságára, illetve összetett események valószínűségére. Egyszerű kétszemélyes valószínűségi játékokban beszéljünk a várható nyeremény és az igazságosság fogalmáról, továbbá történeti érdekességként megemlíthetjük Neumann János szerepét a játékelmélet kialakulásában.